ARITHMETICA
INTRODVCTIO
AD
LOGISTICAM
Vniuersæ Mathesi seruientem.

ÆGIDII FRANCISCI
DE GOTTIGNIES
Bruxellenſis è Societate IESV
In Collegio Romano
MATHESEOS PROFESSORIS

ARITHMETICA INTRODVCTIO
AD
LOGISTICAM
Vniuerſæ Matheſi ſeruientem

CONTINENS

Vulgo vſitatam Arithmeticam practicam; atque ex hac, deriuationem Logiſticæ practicæ, pertinentis ad Arithmeticam.

ROMAE, Typis Nicolai Angeli Tinaſſij. 1676.
SVPERIORVM PERMISSV.

ARGVMENTVM

Arithmeticæ Introductionis ad Logiſticam.

ARithmetica dicitur, ea pars Matheſeos, quæ pro obiecto habet quantitatem diſcretam; hæc Arithmetica diuiditur in ſpeculatiuam, & practicam; de Arithmetica practica hic agimus: quam duplicem conſideramus; alteram appellamus Arithmeticam noſtræ Logiſticæ, quia traditur in opuſculo quod inſcribitur Logiſtica; alteram dicimus vulgarem: non quia humile aut vulgare aliquid continet, ſed quia vulgo, ſiue paſſim, vſu recepta eſt. Vtrique iſti Arithmeticæ practicæ, commune eſt, aſſumere ſcriptiones, breuiter atque compendiatè repræſentantes numeros, vt circa illos commode inſtitui poſſint operationes Arithmeticæ; hoc eſt Additio, Subtractio, Multiplicatio, aut Diuiſio. In vario vſu iſtarum operationum, conſiſtit prædicta vtraque Arithmetica practica: atque inter illas propemodum nulla differentia inuenitur, quæ non dependeat à compendiatis ſcriptionibus: vtraque enim tantum cenſetur operationes ſuas inſtituere circa numeros quos repræſentat compendiata ſcriptione; & ab hac compendiata ſcriptione inter ſe diſtinguimus numeros vulgares, & Logiſticos. Etenim, ſupponendo quod per vnitatem ſimplicem, ſiue quod idem eſt, per vnitatem poſitiuam ſimplicem, intelligendum ſit illud, quod ex vi hypotheſis ſignificatur per vocem, vnum, ſimpliciter ſiue ſolitariè poſitam: numeros vulgares appellamus, qui repræſentantur per decem il-

las.

las notas Arithmeticas, quarum significationem exponimus in primo capite huius opusculi; quæ notæ, siue solitariè, siue simul positæ, ratione sui, aut loci, aut ordinis quo scribuntur, non repræsentant nisi vnitates positiuas simplices, siue integras, siue fractas atque subdiuisas. Quare vulgaris Arithmetica dici potest, quæ versatur circa solos numeros indicantes positiuas simplices vnitates, siue integras, siue fractas. Præter has vnitates positiuas simplices, nonnullas alias compendiata scriptione repræsentat, atque à prioribus, & inter se distinguit, Logistica nostra; tales sunt, vnitates denominatæ, quæ indicantur à numeris quos appellamus numeros denominatos. Deinde vnitates radicales, quæ indicantur à numeris qui radicales dicuntur. Denique vnitates negatiuæ, quæ à nostris numeris negatiuis indicantur. De his consuli potest primus liber nostræ Logisticæ, vel etiam posterior pars huius opusculi. Quare practica Logisticæ nostræ Arithmetica, dici posset, quæ versatur circa quoslibet numeros Logisticos.

In nostra Logistica, aliunde cognita supponitur Arithmetica vulgaris, vel potius illa pars Arithmeticæ vulgaris, in qua traditur modus compendiate scribendi quemlibet numerum vulgarem, atque enuntiandi numerum vulgarem compendiata scriptione repræsentatum; ac præterea, modus instituendi Additionem, subtractionem, multiplicationem, & diuisionem, circa propositos numeros vulgares. His aliunde suppositis, incipimus nostram Logisticam, à modo legendi compendiatas scriptiones Logisticas. In præsenti opusculo, prius exponitur illa pars Arithmeticæ vulgaris, quæ in nostra Logistica aliunde cognita supponitur: deinde declaratur, quomodo ex vulgari Arithmetica, propemodum singula deriuentur, quæ à nobis proposita sunt in primo Logisticæ libro. Quoniam vero enumerata duo capita proponere, nihil aliud mihi videtur, quam viam sternere, quæ à primis Arithmeticæ principijs ducit ad Logisticam nostram, atque ad illam aditum aperire: præsens opusculum inscribitur ARITHMETICA INTRODVCTIO AD LOGISTICAM. Quid à me per Logisticam significetur: finis maxime arduus ac sublimis in Logistica mihi propositus: facilis Logisticæ vsus, atque non vulgares eius vtilitates: tum pro Arithmetica, tum pro Geometria, & Mathesi vniuersa: melius intelligi poterunt ex altero opusculo quod inscribitur, IDEA LOGISTICAE, SPECVLATIVE ET PRACTICE DECLARATA.

Ad scribendum vtrumque illud opusculum, impulit me duplex experientia; nimirum, à me scriptam Logisticam, & facile intelligi, & maxime prodesse auditoribus meis: eamdem tamen, alijs pluribus, videri difficilem, atque parum prodesse. Me in prima experientia non aberrare, testes sunt, qui à me instituuntur in Mathematicis scientijs. De altera experientia, eamdem certitudinem non habeo: illam tamen cogor admittere, nisi velim fateri me nescire quid scripserim. Etenim virorum in Mathematicis versatorum, non pauca testimonia ad me delata sunt: asserentia, à me conscriptam Logisticam speciosæ Algebræ compendium esse: quod aliqui testantur satis bene propositum: alij affirmant aliqua ex parte defectuosum. Iam vero, vel Logistica nostra Algebra est, vel non est Algebra; si primum, fateri cogor, & candide fateor, me, vel nescire quid Algebra sit, vel ignorare quid scripserim. Si secundum, concedendum erit, viros in Mathemati-

cis

cis verſatos, perlecta noſtra Logiſtica, neſciuiſſe quid legerint; hactenus cogor hanc poſtremam partem admittere; qua ſuppoſita, ſi tam pernicioſæ temporis iacturæ cauſa ſit, quod clauſis vt ita dicam oculis ſcripta noſtra percurrant, culpa mea non eſt; ſi vero cauſetur ab aliquibus tenebris quæ in noſtra Logiſtica inueniuntur, non immerito à me requiri poterat maius lumen; vtinam illud quod affero, vel in hoc opuſculo, vel in noſtræ Logiſticæ idea, proſit diſcentibus noſtram Logiſticam, & tamen moleſtum non ſit illorum oculis, qui tenebris, vel tenuiori lumini dudum aſſueti, atque contenti viuunt.

EGo Dominicus Brunaccius Societatis Ieſu, in Prouincia Romana Præpoſitus Prouincialis, poteſtate ad id mihi facta à Patre noſtro Generali Io. Paulo Oliua, facultatem facio, vt liber cui titulus *Arithmetica Introductio ad Logiſticam Vniuerſæ Matheſi ſeruientem*, à P. Aegidio Franciſco de Gottignies noſtræ Societatis Sacerdote conſcriptus, & eiuſdem Societatis doctorum virorum iudicio approbatus, typis mandetur, ſi ijs, ad quos ſpectat, ita videbitur. In quorum fidem has litteras manu mea ſubſcriptas, & ſigillo muneris mei ſignatas dedi. Romæ 7. Auguſti 1676. *Dominicus Brunaccius.*

Imprimatur,

Si videbitur Reuerendiſs. P. Mag. Sac. Pal. Apoſt.

I. de Ang. Archiep. Vrb. Viceſg.

Imprimatur,

Fr. Raymundus Capiſuccus Ordinis Prædicatorum Sac. Pal. Apoſt. Mag.

ARITH-

ARITHMETICAE VVLGARIS.

CAPVT PRIMVM.

De characteribus ſiue notis Vulgaris Arithmeticæ, atque illorum valore, & modo legendi numeros integros vulgares, talibus characteribus expreſſos.

VT compendiata, & commoda ſcriptione exhiberi poſſint numeri, circa quos operationes ſuas inſtituere docet Arithmetica, quam vulgarem appellamus: deſeruiunt decem characteres, qui aliter notæ, aut digiti, aut figuræ appellantur; ſunt autem ſequentes decem

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0.

Nota, 1. exprimitur per vocem vnum. Nota, 2. exprimitur per vocem duo. Nota, 3. exprimitur per vocem tria. Nota, 4. exprimitur per vocem quatuor. Nota, 5. exprimitur per vocem quinque. Nota, 6. exprimitur per vocem ſex. Nota 7. exprimitur per vocem ſeptem. Nota 8. exprimitur per vocem octo. Nota, 9. exprimitur per vocem nouem. Nota, 0. cifra dicitur, exprimitur per vocem nullus, aut nihil. Singulæ iſtæ notæ, duplicem valorem habere poſſunt: ex his duobus valoribus, vnus eſt valor proprius, quem nota habet ratione ſui; alter eſt valor localis, quem nota habet ratione loci, qui illi conuenit quando immediatè verſus leuam præcedit alias notas, ſubſequentes verſus dexteram.

Ratione ſui, 1. ſignificat vnam ſimplicem vnitatem, ſiue vnum; 2. ſignificat duas vnitates ſimplices, ſiue vnum binarium vnitatum ſimplicium; 3. ſignificat tres vnitates ſimplices, ſiue vnum ternarium vnitatum ſimplicium; 4. ſignificat quatuor vnitates ſimplices, ſiue vnum quaternarium vnitatum ſimplicium; 5. ſignificat quin-

que

que vnitates simplices, siue vnum quinarium vnitatum simplicium; 6. significat sex vnitates simplices siue vnum senarium vnitatum simplicium; 7. significat septem vnitates simplices, siue vnum septenarium vnitatum simplicium; 8. significat octo vnitates simplices, siue vnum octonarium vnitatum simplicium; 9. significat nouem vnitates simplices, siue nouenarium vnitatum simplicium; 0. significat nullam vnitatem simplicem, siue nihil.

Ratione loci, cuiuslibet notæ vel characteris valor proprius, toties in decuplum excrescit, quot versus dexteram subsequuntur characteres: exempli gratia, characteris, 8. valor proprius est octo, & ratione sui significat octo vnitates simplices: verum si hunc characterem 8. immediatè versus dexteram subsequatur vnicus alius character, significabit octuaginta vnitates simplices, siue octo decades vnitatum simplicium; hinc scriptio 80. legitur octuaginta; item scriptio 70. legitur septuaginta; item scriptio 10. legitur decem; & ita de ceteris. Vbique subaudiuntur vnitatum simplicium indiuidua, siue vnitates simplices. Si characterem 8. versus dexteram subsequantur duo characteres, sed non plures: valor eius proprius bis in decuplum excrescit, & significabit octingenta, siue octo centena; hinc 800. legitur octingenta. 700. legitur septingenta; 200. legitur ducenta; & ita de ceteris vbique iterum subaudiuntur indiuidua vnitatum simplicium, siue vnitates simplices; adeo vt vox octingenta, idem significet ac si diceretur octingenta indiuidua vnitatum simplicium, siue octingentæ vnitates simplices. Ex his patet quod scriptio 864. legatur octingenta sexaginta quatuor; etenim character 8. ratione sui, & loci, significat octingenta: item character 6. ratione sui, & loci, significat sexaginta: denique charecter 4. ratione sui, & loci, significat quatuor, cum proprius eius valor ratione loci non crescat: adeoque tota scriptio 864. significat octingenta sexaginta quatuor.

Vt quælibet scriptio vulgaris Arithmeticæ notis expressa legi possit, sufficit intelligere prædictos valores, proprios, atque locales notarum quibus vtitur vulgaris Arithmetica: dummodo in promptu sint voces, quibus tales valores possint enuntiari. Verùm quia eiusmodi valores qui centum aut mille superant, parum visitati sunt apud eos, qui Arithmeticam non didicerunt; etiam in promptu non habent voces, quibus tales valores enuntiantur. Vt hic vocum defectus suppleatur, & quilibet facilè possit legere numeros vulgaris Arithmeticæ notis compendiosè scriptos, vtiles esse possunt sequentes praxes.

Pra-

Praxis prima, siue modus legendi numerum vulgarem integrum, qui sex, aut paucioribus notis Arithmeticis exprimitur.

EX ijs, quæ paulo ante diximus, de significatione, ac valore characterum, aut notarum vulgaris Arithmeticæ, abundè patet, quomodo legantur numeri tribus tantum, vel paucioribus notis expressi; immo huiusmodi numeros legere vix vlli ignorant, qui aut legere, aut scribere didicerunt, cum quibus tantum agimus; itaque vel ex paulo ante traditis, vel aliundè, supposita notitia requisita, vt tribus, vel paucioribus notis expressi numeri legantur, hic tantum traditur, quomodo legantur numeri, qui exprimuntur, quatuor, quinque, aut sex, characteribus, aut notis Arithmeticis.

Incipiendo à fine numeri propositi, post tertiam notam ponatur virgula: deinde notæ virgulam præcedentes legantur, ac si nullæ aliæ sequerentur, atque his vocibus addatur vox mille, vel vox millia, pro vt sensus exigit: denique legantur etiam reliquæ tres notæ, ac si ipsas nullæ aliæ præcederent, sic enim totum propositum numerum rectè leges. Ex. Gr. numerus A. rectè legitur, dicendo, quatuor millia trecenta viginti sex, vbi apparet, quomodo pro virgula legatur vox millia. Similiter numerus B. rectè legitur, dicendo, triginta quatuor millia trecenta viginti sex. Pari modo numerus C rectè legitur, dicendo, centum triginta quatuor millia trecenta viginti sex.

A. 4, 326

B. 34, 326

C 134, 326

Praxis secunda, Siue modus legendi numeros vulgares integros pluribus quam sex notis Arithmeticis expressos.

PRimo incipiendo à fine numeri propositi, totus numerus propositus diuidatur in membra, quæ singula sex notas contineant, atque puncto interposito ab inuicem distinguantur: membrum tamen quod versus sinistram primum est, non quidem plures, sed tamen pauciores quam sex notas continere poterit; deinde singulis punctis membra ab inuicem separantibus, subscriban-

tur

tur numeri, indicantes, quot membra ſequantur verſus dexteram poſita; Sic enim habebitur numerus diuiſus in membra, quæ ſingula non plures quam ſex notas Arithmeticas continebunt, adeoque per primam praxim legi poterunt. Vt iuxta primam praxim ſucceſſiue legendo ſingula membra, legitime enuntietur totus numerus: duo diuerſi modi vtiles eſſe poſſunt.

Primus, atque paulo longior modus eſt, ſi incipiendo à ſiniſtra parte, ſingula membra ſucceſſiue legantur, hoc tantum obſeruando, vt vocibus quibus membrum enuntiatur, toties addatur vox millio (in caſu quem ſenſus exigit) quot vnitates indicat numerus ſubſcriptus puncto membrum terminanti; ſic enim legitime enuntiabis totum numerum.

Secundus modus paulo compendioſior, aſſumit ſubſequentes voces, millio, bilio, trilio, quatrilio, quintilio, ſextilio, ſeptilio: aut plures his ſimiles, ſi pluribus opus ſit; harum vocum prima, ſiue millio, ſignificat millies mille, vox bilio, idem ſignificat, ac vox millio bis ſucceſſiue poſita: adeo vt idem ſit, vnus bilio, vel vnus millio millionum. Vox trilio, idem ſignificat ac vox millio ter ſucceſſiue poſita: adeo vt idem ſit, vnus trilio, & vnus millio millionum millionum. Vox quatrilio, idem ſignificat ac vox millio quater ſucceſſiue poſita: adeo vt idem ſit, vnus quatrilio, vel vnus millio millionum millionum millionum. Hinc ſatis manifeſtum eſt, quid ſignificent reliquæ voces hic aſſumptæ: & etiam quomodo his ſimiles aliæ efformari poſſint: ac denique, quæ ex his vocibus correſpondeat cuilibet numero ſubſcripto alicui puncto membrum terminanti; quibus cognitis, vt ſecundo atque paulo compendioſiori modo legatur propoſitus numerus: incipiendo à ſiniſtra parte, ſingula membra ſucceſſiue legenda erunt, hoc tantum obſeruando, vt vocibus quibus membrum enuntiatur, addatur vox correſpondens numero, qui ſubſcriptus eſt puncto membrum terminanti. Sic enim legitime enuntiabitur totus numerus.

Pro exemplo propoſitus ſit numerus A: qui paruus non eſt, immo plures vnitates ſignificat, quam ſint notæ Arithmeticæ, ad quas ſcribendas ſufficerent omnes totius orbis terrarum aquæ, in atramentum conuerſæ.

A.7032658491000375374293570130423.

Numerus A in membra diuiſus, repræſentatur à ſubſequenti ſcriptione: ex qua ſatis apparet, quomodo propoſiti maiores numeri in membra diuidendi ſint, vt commode legantur, iuxta praxim de qua hic agimus.

7. 0


```
7.036258.491000.375374.293570.130423.
V.        IV.       III.      II.       I.
```

Hunc numerum iuxta primum modum ita leges. Septem milliones millionum millionum millionum millionum: triginta duo millia ſexcenti quinquaginta octo milliones millionum millionum millionum: quadringenta nonaginta vnum millia millionum millionum millionum: trecenta ſeptuaginta quinque millia trecenti ſeptuaginta quatuor milliones millionum: ducenta nonaginta tria millia quingenti ſeptuaginta milliones: centum triginta millia quadringenta viginti tria.

Eumdem numerum iuxta ſecundum modum, ita leges, ſeptem quintiliones: triginta duo millia, ſexcenti quinquaginta octo quatriliones: quadringenta nonaginta vnum millia trilionum: trecenta ſeptuaginta quinque millia trecenti ſeptuaginta quatuor biliones: ducenta nonaginta tria millia quingenti ſeptuaginta milliones: centum triginta millia quadringenta viginti tria.

Non video quæ in enuntiandis vulgaribus atque integris numeris ſupereſſe poſſit difficultas ad Arithmeticum ſpectans, cuius officium non eſt exponere leges pertinentes ad Grammaticorum genera, numeros, aut caſus. Si alicui videar, non ſatis exacte obſeruaſſe, has Grammaticorum leges, in enuntiandis propoſitis numeris: ſciat me id feciſſe ſuadente commoditate.

Aliqua notanda pro numeris vulgaribus, aut operationibus Arithmeticis.

EXpoſita praxi enuntiandi quoslibet integros numeros vulgares compendioſe expreſſos notis Arithmeticis, quæque ad eiuſmodi notarum intelligentiam magis neceſſaria videbantur, propono hic aliqua magis neceſſaria pro tradendis de operationibus Arithmeticis inſtitutis circa numeros vulgares integros.

I. Quid ſit vulgaris Arithmetica dicitur in opuſculi huius argumento; numeri quos compendiata ſcriptione exhibet, dicuntur numeri vulgares, qui diuiduntur in integros & fractos; numeri vulgares integri dicuntur, qui indicant vnam vel plures vnitates ſimplices: fracti numeri vulgares dicuntur, qui indicant aliquas vnitates quæ ſint partes vnitatis ſimplicis.

II. Vnitas ſimplex dicitur illa quæ ſignificatur per vocem vnum ſimpliciter poſitam, ſed ex aliqua præcedente hypotheſi determinatam

natam

natam ad significandam alicuius speciei vnitatem, siue indiuiduum: vnitas enim & indiuiduum hic idem significant. Exempli gratia posita hypothesi, quod per vocem vnum simpliciter positam placeat intelligere vnum hominem, vnitas simplex erit vnus homo. Similiter posita hypothesi, quod per vocem vnum simpliciter positam placeat intelligere binarium hominum, vnitas simplex erit binarius hominum. Pari modo posita hypothesi, quod per vocem vnum simpliciter positam placeat intelligere vnum binarium abstractum, vnitas simplex erit vnus binarius abstractus; atque ita de ceteris: quoties enim voces vnum, duo, tria, simpliciter positæ adhibentur, ex circumstantijs in quibus adhibentur, hoc est ex hypothesi in qua adhibentur, percipitur quid subaudiri debeat, siue qualia indiuidua, vel quales vnitates significent: atque hoc modo significatæ vnitates dicuntur vulgares simplices: vulgares quidem, quia per vulgares numeros indicantur: simplices vero quia indicantur per vocem vnum, aut vnitatem simpliciter prolatam, aut nota Arithmetica expressam.

III. Quando dicitur numerus A, intelligi debet numerus, quem ex vi hypothesis significat, siue repræsentat littera A; idem est de alijs alphabeti litteris. Exempli gratia posita hypothesi, quod littera A repræsentet numerum 24, numerus A, & numerus 24, idem significant. Similiter si agendo de numero exhibeatur numerus 20, aut alius aliquis, cum adscripta littera A, quod dicitur de numero A, intelligi debet de numero cui littera A adscripta repræsentatur. Pari modo si littera A assumatur ad significandum quemlibet numerum indeterminate sumptum, quod dicitur de numero A, intelligi debet de quouis numero indeterminate sumpto.

IV. Operationes vulgaris Arithmeticæ vniuersim sunt quatuor, nimirum Additio, Subtractio, Multiplicatio & Diuisio; quæ singulæ sunt operationes Arithmeticæ: atque omnes & solæ istæ operationes dicuntur operationes Arithmeticæ.

V. Numeri dati pro aliqua operatione Arithmetica, appellantur illi numeri, qui proponuntur pro facienda ea operatione. Ex: gr: si pro facienda additione proponantur numeri A & B; dati pro additione numeri erunt A & B: hi numeri dati, aliter vocantur genitores operationis Arithmeticæ, pro qua dantur, siue proponuntur.

VI. Numerus A plus numero B, idem significat, ac si diceretur numerus A simul cum numero B. Exempli gratia quia *6* simul cum 2 dat 8, etiam *6* plus 2 dat 8. Numerus A minus numero B, hic idem significat, ac si diceretur numerus A sublato numero B, siue illud quod remanet quando ex numero A aufertur numerus B. Exempli

empli gratia quia ex numero *6* auferendo numerum 2, remanet numerus 4: etiam *6* minus 2 dat 4.

VII. Ex duobus genitoribus, siue numeris datis alicuius operationis Arithmeticæ, vnus vocatur superior, alter inferior. Datus numerus, siue genitor superior, dicitur ille cui alter debet addi, vel ex quo alter debet subtrahi, vel qui per alterum debet multiplicari aut diuidi. Inferior genitor, siue numerus datus, dicitur ille, qui debet addi, vel subtrahi, vel per quem alter debet multiplicari, aut diuidi. Exempli gratia, si genitores, siue dati numeri sint, A & B superior erit A & inferior erit B, supposito quod numero A debeat addi numerus B: vel quod ex numero A debeat subtrahi numerus B: vel quod numerus A debeat multiplicari, aut diuidi per numerum B.

VIII. Productum siue genitum ex aliqua operatione Arithmetica, dicitur numerus qui oritur ex tali operatione. Huiusmodi productum distinguo in totale & partiale; intelligendo per productum totale, totum numerum qui oritur ex tali operatione; similiter per productum partiale intelligendo, partem, siue vnam notam Arithmeticam producti totalis: quoties tamen sermo est de producto, vel genito ex aliqua operatione, & oppositum expresse non dicitur, agitur de producto totali. Aliter etiam Arithmeticæ operationis productum distinguo, nimirum in productum simplicis operationis, & productum compositæ operationis: primum est quod oritur ex simplici operatione, secundum est quod oritur ex composita operatione.

IX. Operationes Arithmeticas distinguo in simplices & compositas. Additio, & etiam subtractio erit simplex, si vnus ex duobus genitoribus, siue numeris datis pro additione, vel subtractione, exprimatur vnica nota Arithmetica; si vero vterque genitor exprimatur pluribus notis Arithmeticis, Additio, vel Subtractio, erit composita. Multiplicatio erit simplex, si vterque genitor, siue vterque numerus datus pro multiplicatione, exprimatur vnica nota Arithmetica; reliquæ multiplicationes dicuntur compositæ. Denique Diuisio erit simplex, si ex illa producatur vnica nota Arithmetica: reliquas diuisiones appello compositas; his tamen simplicium, compositarumque operationum distinctionibus non vtor nisi in operationibus institutis circa integros numeros vulgares, in quibus exponendis, à simplicibus, atque facilioribus operationibus, gradum facio ad compositas operationes.

C A.

CAPVT II.

De Additione numerorum integrorum vulgarium.

ADditio docet plures numeros in vnam summam colligere, atque hanc summam exhibere; siue inuenire vnum numerum qui propositis duobus, aut pluribus numeris simul sumptis, æqualis sit.

Additio de qua hic agitur potest esse simplex vel composita: quomodo additio simplex absoluatur, ex ipsa additionis definitione adeo manifestum est, vt nulla declaratione indigeat: quis enim tam ignarus, vt nesciat, quod 2 plus 3 dent 5: item quod 7 plus 6 dent 13: item quod 15 plus 4 dent 19; vel quod numeri 2 & 3 simul sumpti æquentur numero 5: item quod numeri 7 & 6 simul sumpti æquentur numero 13? iam verò pauciores quàm decem vnitates eadem facilitate adduntur, minoribus, atque maioribus numeris: atque ea additio vocatur simplex, in qua alicui proposito numero pauciores quam decem vnitates addendæ proponuntur; igitur prætermissa vlteriori expositione additionis simplicis, quæ ex ipso additionis conceptu manifesta est, neque vllam difficultatem annexam habet: venio ad additionem compositam, quæ expositione indiget, & declaro quomodo per iteratas additiones simplices absoluatur composita additio, quando pro additione dati numeri sunt vulgares, atque integri; & primo quidem trado praxim, qua huiusmodi compositæ additiones absoluuntur, quando dati numeri sunt eiusdem speciei; deinde ex tradita praxi deduco additionem vulgarium atque integrorum numerorum, qui inter se specie differunt; vtrum duo numeri sint eiusdem, vel diuersæ speciei declaratur capite 6. quod caput consuli poterit ab eo, qui desiderat magis exactam expositionem numerorum eiusdem, vel diuersæ speciei.

Praxis prima, siue additio numerorum integrorum vulgarium, qui non differunt specie.

PRimò, mediante additione simplici, de qua paulo ante egimus, addẽdo successiue omnes notas Arithmeticas vltimo loco scriptas

ptas.

ptas in numeris datis pro additione, inuenies productum partiale, cuius producti postrema nota vltimo loco scribenda est in producto totali quod quæritur, & à reliquis notis producti partialis indicatæ vnitates (si aliquæ notę reliquæ sint ab vltima diuersæ) seruari debent pro penultimo loco. Secundò, iterum mediante simplici additione, seruatis pro penultimo loco vnitatibus addendo successiue omnes notas in datis numeris scriptas penultimo loco, habebitur nouum productum partiale, cuius postrema nota penultimo loco scribenda est in producto totali, atque à reliquis partialis producti notis indicatæ vnitates, seruandæ erunt pro antepenultimo loco. Simili plane modo successiue operando, circa datorum numerorum notas scriptas in locis æqualiter ab vltimo loco distantibus, inuenies productum totale quod desideratur.

Pro exemplo, propositi sint vulgares integri numeri A, B, C quos oporteat addere, atque inuenire productum ex tali additione. Cōmodum est ita datos numeros scribere, vt hic factum vides: nimirum vt omnes notæ vltimo loco scriptæ deorsum sibi respondeant: atque similiter deorsum sibi respondeant datorum numerorum notæ reliquæ, æqualiter distantes ab vltimis notis. Verum siue modo iam exposito, siue aliter scripti sint numeri dati, vt inueniatur productum additionis in hunc modum practice discurritur.

977251.	A
230963.	B
80842	C
1289056.	D

2 plus 3 dat 5, & 5 plus 1 dat 6, itaque in producto vltimo loco scribo 6, & nihil seruo pro penultimo loco. Rursus quia nihil seruatum fuit pro penultimo loco, 4 plus 6 dant 10, & 10 plus 5 dant 15: itaque penultimo loco scribo 5, & seruo 1. Rursus quia 1 seruaui, 1 plus 8 dat 9, & 9 plus 9 dat 18, item 18 plus 2 dant 20: itaque tertio loco à fine scribo 0 & seruo 2. Rursus quia 2 seruaui, 2 plus 7 dant 9, quarto loco à fine scribo 9 & seruo 0. Rursus quia 0 seruaui, 0 plus 8 dant 8, & 8 plus 3 dant 11, item 11 plus 7 dat 18, quinto loco à fine, scribo 8, & seruo 1. Rursus quia 1 seruaui, & 1 plus 2 dant 3, item 3 plus 9 dant 12, sexto loco à fine scribo 2, & seruo 1 pro septimo loco à fine, atque septimo loco à fine scribo 1 quia in datis numeris septimo loco à fine nihil inuenitur scriptum, adeoque nec addendum vnitati seruatæ pro septimo loco à fine: totusque numerus D, per iteratas simplices additiones collectus, erit productum additionis propositæ.

Hæc sufficere existimo pro additione in qua duo, vel plures numeri vulgares integri, atque eiusdem speciei, addendi proponuntur: vt ex hac ipsa additione melius appareat praxis vsitata pro additio-

ditio-

ditione, in qua (vt loquuntur practicæ Arithmeticæ scriptores) diuersæ species addendæ proponuntur: vtile erit reflectere, additionem hic expositam, amplecti, siue inuoluere duo inter se diuersa, nimirum iteratam additionem simplicem, & præterea reductionem vnius speciei vnitatum ad vnitates alterius speciei. Pro praxi proposita requiri iteratam simplicem additionem satis manifestum est. Vt intelligatur pro eadem additionis praxi requiri reductionem vnitatum vnius speciei ad vnitates alterius speciei, aduertendum, vnitates simplices, specie differre ab vnitatibus, quæ singulæ sunt decades vnitatum simplicium: & iterum vtramque hanc vnitatum speciem diuersam, etiam specie differre ab vnitatibus, quæ singulæ sunt centenarij, aut millenarij vnitatum simplicium; hinc quando Exempli gratia pro decem vnitatibus simplicibus collectis ex notis vltimo loco scriptis seruatur vnitas, atque illa vnitas additur vnitatibus collectis ex vnitatibus scriptis penultimo loco, decem vnitates simplices reducuntur ad vnitatem alterius speciei, nimirum ad vnam decadem vnitatum simplicium, quæ plane æquiualet decem vnitatibus simplicibus, atque adeo vna decas vnitatum simplicium non malè substitui potest, pro decē vnitatibus: ex quo non tantum constat, propositam additionis praxim inuoluere reductionem vnitatum vnius speciei ad vnitates alterius speciei; verum etiam quare talis vnitatum reductio legitimè adhibeatur, & in quo fundetur ea pars expositæ praxeos; quæ iubet notam aliquam seruari. Iam verò pro illis praxibus in quibus vulgaris Arithmeticæ scriptores docent addere numeros diuersæ speciei, sufficiunt duo illa, quæ hic ostendimus inueniri, aut considerari posse in proposita praxi, quæ agit de additione numerorum eiusdem speciei; etenim in additionibus in quibus concurrunt numeri diuersæ speciei nusquam docent, Exempli gratia, in vnam summam colligere tres libros, & quatuor calamos, qui duo numeri simul, neque constituunt septem calamos, neque septem libros, immo addi, siue in vnum numerum colligi non possunt, eo ipso quod reduci non possint ad vnitates eiusdem speciei: sed tantum docent inuenire numerum magis compendiatum, atque æquiualentem pluribus numeris datis pro additione, vt apparebit ex subsequente praxi.

Pra-

Praxis secunda, Siue additio numerorum integrorum vulgarium, quando aliqui ex datis numeris, indicant diuersæ speciei vnitates.

PRo hac praxi nihil requiritur, præter additionem numerorum eiusdem speciei, & reductionem vnitatum vnius speciei, ad vnitates alterius speciei, de quibus satis multa notauimus in præcedente praxi: reliquum igitur est, vt propositam praxim declaremus in exemplis. In quem finem numerus indicans 8 libras cum 10 vncijs addendus sit numero indicanti 14 libras, cum 9 vncijs; huius additionis productum haberi potest duplici modo. Primo. Mediante prima praxi vncias 10 addendo vncijs 9 habebis vncias 19 collectas ex datis numeris; & similiter per eamdem praxim, 8 libras addendo 14 libris, habebis 22 libras collectas ex datis numeris: adeoque ex datis numeris, vniuersim habebis collectas 22 libras cum 19 vncijs: atque hic numerus libras & vncias indicans, erit productum ex propositis numeris, atq; illis simul sumptis æquale, sed breuius exhibens, quod dati numeri minus compendiate indicant. Vbi obseruari potest, quomodo ad inueniendum additionis productum, nihil adhibitum sit, præter praxim primam, siue additionem numerorum eiusdem speciei.

libræ	vnciæ
14	9
8	10
22	19

Secundo. Mediante prima praxi, vncias 10 addendo 9 vncijs, habebis 19 vncias: quibus æquiualet vna libra cum 7 vncijs (nimirum supposito quod 12 vnciæ vnam libram constituant) itaque scribendo 7 vncias, & seruando atque transferendo vnam libram ex vncijs collectam, ad numeros libras significantes, etiam illi numeri erunt colligendi in vnam summam, atque ita habebis 23 libras, & numerus indicans 23 libras cum 7 vncijs, indicabit productum propositæ additionis. Vbi obseruari potest, inuentionem huius secundi producti, exhibentis 23 libras cum 7 vncijs, non differre ab inuentione producti exhibentis 22 libras cum 19 vncijs, nisi quod pro inuentione primi producti, adhibeatur sola additio tradita in prima praxi, hoc est sola additio numerorum eiusdem speciei; pro inuentione secundi producti, præter additionem numerorum eiusdem speciei, adhibetur reductio vnitatum indicantium vncias, ad vnitates indicantes libras.

libræ	vnciæ
14	9
8	10
23	7

 Ex

Ex propoſitis duobus modis inueniendi productum additionis, quando dati numeri non ſunt eiuſdem ſpeciei, vterque vtilis eſt: ſecundus tamen, qui inuoluit reductionem, requirit notitiam pro tali reductione requiſitam, exempli gratia, quot vnciæ conſtituant vnam libram: vel vniuerſaliter, quot vnitates vnius ex ſpeciebus datis, conſtituant vnitatem alterius ſpeciei: quare ſi deſit hæc notitia, primus modus erit adhibendus.

CAPVT III.

De ſubtractione numerorum integrorum vulgarium.

SVbtractio docet minorem numerum ex maiori auferre, atque exhibere reſiduum; ſiue inuenire numerum qui ſit differentia duorum numerorum qui proponuntur; vel inuenire numerum qui minori dato numero addi debet, vt habeatur numerus qui dato maiori numero æqualis ſit.

Subtractio de qua hic agitur, poteſt eſſe ſimplex, vel compoſita: quomodo ſubtractio ſimplex abſoluatur, manifeſtum eſt ex ipſa definitione ſubtractionis, neque vlla declaratione indiget: ſic exempli gratia patet, quod 5 minus 2 det 3: item quod 19 minus 4 det 15; & quia pauciores quam decem vnitates eadem facilitate ſubtrahuntur ex numeris maioribus, atque minoribus; ea ſubtractio quæ ſimplex dicitur, & in qua nunquam plures quam 9 vnitates ex propoſito alio maiori numero auferendæ proponuntur, manifeſta eſt ex ipſo conceptu ſubtractionis: neque vlla declaratione indiget; quomodo per iteratas ſimplices ſubtractiones abſoluatur ſubtractio compoſita, in qua ex propoſito numero maiori, plures quam 9 vnitates ſubtrahendæ proponuntur, docent ſequentes praxes:

Praxis prima, ſiue ſubtractio numerorum integrorum vulgarium, qui non differunt ſpecie.

PRimo mediante ſubtractione ſimplici, ſubtrahendo vltimam notam dati numeri inferioris, ex vltima nota dati numeri ſuperioris (denario auctam ſi opus fuerit) habebitur vltima

ma nota producti quæſiti: eritque pro penultimo loco ſeruanda vnitas, ſi vltima nota dati ſuperioris numeri denario aucta fuerit; vel ſi hæc nota denario aucta non fuerit, nihil ſeruatur. Secundo quod ſeruatum fuit prius additur penultimæ notæ inferioris numeri, ac deinde aufertur ex penultima nota ſuperioris numeri (denario aucta ſi opus fuerit) ſeruando vnitatem, ſi denario aucta fuit nota ſuperior. Tertio ſucceſſiue circa ſingulas notas quæ penultimas præcedunt, fit illud idem quod circa penultimas faciendum præſcribitur: atque ita per iteratas ſimplices ſubtractiones, paulatim in producto colleguntur notæ omnes; quibus exprimitur propoſitæ ſubtractionis productum, ſiue reſiduum quod inueniri debet.

Pro exemplo, propoſitus ſit numerus A, ex quo ſubtrahi debeat minor numerus B, eiuſdem tamen ſpeciei cum numero A. vt inueniam productum, ſiue reſiduum propoſitæ ſubtractionis commodum eſt ita datos numeros ſcribere, vt hic exhibentur: nimirum vt vltima nota dati inferioris numeri reſpondeat vltimæ notę dati numeri ſuperioris: atque eodem modo reliquæ notæ numeri inferioris, reſpondeant notis numeri ſuperioris; verum ſiue hoc modo, ſiue aliter ſcripti ſint dati numeri, vt inueniatur productum ſubtractionis, in hunc modum practicè diſcurritur. 5 minus 1 dat 4. itaque 4 ſcribo vltimo loco in producto, & nihil ſeruo (quia numerum 5 denario augere neceſſe non fuit ad faciendam ſimplicem ſubtractionem). Rurſus quia nihil ſeruatum fuit, & 3 minus 6 eſt aliquid impoſſibile, ſumo 13 minus 6 quod dat 7; itaque 7 ſcribo penultimo loco in producto, & ſeruo 1. Rurſus quia 1 ſeruaui, 2 plus 1 faciunt 3, & 0 minus 3 eſt aliquid impoſſibile, ſumo 10 minus 3, quod dat 7: itaq; in producto ſcribo 7 tertio loco à fine, & ſeruo 1. Rurſus quia vnum ſeruaui, 8 plus 1 dat 9, & 7 minus 9 eſt aliquid impoſſibile, ſumo 17 minus 9, quod dat 8: itaque in producto ſcribo 8 quarto loco à fine, & ſeruo 1. Rurſus quia 1 ſeruaui, & nihil inuenio cui addi debeat, 4 minus 1 dat 3: itaque in producto ſcribo 3 quinto loco à fine, & nihil ſeruo. Rurſus quia nihil ſeruaui neque in inferiori numero aliam notam inuenio, 5 minus 0 dat 5, in producto ſcribo 5 ſexto loco à fine: eritque operatio abſoluta, quia nullę ſuperſunt notæ, circa quas continuari poſſit: adeoque notæ hactenus ſcriptæ in producto, exhibebunt numerum D quæſitum, atque exhibentem differentiam numerorum A & B, ſiue reſiduum quod relinquitur quando numerus B ex numero A auffertur.

5 4 7 0 3 5.	A
8 2 6 1.	B
5 3 8 7 7 4.	C

Hæc

Hæc sufficere existimo pro subtractione in qua dati numeri sunt vulgares integri, atque eiusdem speciei. Vt ex subtractione exposita, melius innotescat praxis vsitata pro subtractione in qua proponuntur numeri diuersæ speciei, vtile erit aduertere, subtractionem hic expositam, inuoluere duo inter se diuersa (vt præcedenti capite monuimus agendo de additione) nimirũ iteratam subtractionẽ simplicem, & præterea reductionem vnitatum vnius speciei, ad vnitates alterius speciei. Primum satis manifestum est; pro secundo aduertendum, quod quoties ex notis æqualiter ab vltima distantibus, inferior ex superiori auferri non potest, tunc superiorem notam decem vnitatibus augeri, atque hunc vnitatum denarium, haberi ex vnitate, quæ proximæ præcedenti inferiori notæ addita, aufertur ex respondente nota superioris numeri: atque adeo vnitas, quæ decas est, reducta ad decem vnitates, decadi equiualentes, constituit illas decem vnitates, quibus augetur nota superior, ex qua inferior subtrahi non potest: ipsa verò vnitas quæ decas est, aufertur ex præcedenti nota; sicut enim in additione, decem vnitates qualescunque illæ sint, reducuntur ad vnitatem, quę sit decas prædictarum vnitatum, ita hic vnitas quæ est decas aliquarum vnitatum, reducitur ad decem eiusmodi vnitates. Ex his satis apparet, non tantum propositam subtractionis praxim inuoluere reductionem vnitatis vnius speciei, ad vnitates alterius speciei; verum etiam, quare talis reductio legitimè adhibeatur, & in quo fundetur ea pars expositæ praxeos, quæ iubet denario augeri notam, ex qua inferior nota subtrahi non potest; atque pro eiusmodi decem vnitatibus transferri, siue seruari vnitatem, quæ cum reliquis vnitatibus indicatis à proximè præcedente nota inferioris numeri, auferatur ex correspondente nota superioris numeri. Pro praxibus, in quibus Arithmeticæ practicę scriptores docent subtractionem, quando diuersæ speciei numeri proponuntur, nihil adhibetur, præter subtractionem in prima praxi propositam, & reductionem vnitatum vnius speciei, ad vnitates alterius speciei, neque vsquam docent subtractionem pro qua hęc duo non sufficiunt; sic exempli gratia nusquam docent 3 libros ex 4 calamis subtrahere: siue inter tres libros & quatuor calamos differentiam inuenire; etenim inter omnes numeros possibiles, nullus inuenitur, qui sit differentia inter tres libros, & quatuor calamos, subtractio autem non docet nisi inuenire numerum qui propositorum duorum numerorum differentia sit.

Pra-

Praxis secunda, siue subtractio numerorum integrorum vulgarium, quando aliqui ex datis numeris indicant diuersæ speciei vnitates.

PRo hac praxi nihil requiritur præter subtractionem numerorum eiusdem speciei, & reductionem vnitatum vnius speciei, ad vnitates alterius speciei (de quibus satis multa in præcedente praxi) vt patebit ex subsequentibus exemplis. Ex numero 23 librarum cum 7 vnciis, subtrahendus sit numerus 14 librarum cum 9 vncijs. Vt propositam subtractionem absoluam ita practice discurro, 9 vncias ex 7 vncijs auferre non possum, igitur 7 vncijs addendo vncias constuentes vnã libram, hoc est 12 vncias, habeo 19 vncias: atque vnciæ 19 minus 9 vncijs dant 10 vncias: igitur in producto scribo 10 vncias, & seruo vnam libram: deinde vna libra seruata plus 4 libris dant 5 libras; verum 3 libræ minus 5 libris, est aliquid impossibile; quare sumo 13 libras minus 5 libris, quæ dant 8 libras, quas scribo in producto, & seruo vnum (nimirum vnam librarum decadem) Rursus quia vnum seruaui & 1 plus 1 dant 2; & 2 minus 2 dant 0 in producto deberem scribere 0, si prosequenda esset operatio, sed quia illa absoluta est, ob defectum aliarum notarum, circa quas continuari debeat, non scribo 0, quia primo loco positum nihil significat; atque adeo productum propositæ subtractionis erit numerus, qui indicatur à notis scriptis in producto, nimirum numerus indicans 8 libras cum 10 vncijs.

libræ	vnciæ
23	7
14	9
8	10

Pro secundo exemplo, numerus indicans 10 gradus cum 52 minutis primis, & 7 minutis secundis, subtrahendus sit ex numero indicante 20 gradus cum 5 minutis secundis. Vt in proposito casu productum subtractionis inueniam, sic practice discurro. 5 minuta secunda minus 7 minutis secundis est aliquid impossibile, quare sumo 65 minuta secunda minus 7 minutis secundis, quæ dant 58 minuta secunda; igitur in producto scribo 58 minuta secunda, & seruo vnum minutum primum, quod reductum ad 60 minuta secunda adhibitum fuit. Rursus 52 minuta prima

Gradus	min. 1.	min. 2.
20	0	5
10	52	7
9	7	58

plus

plus vno minuto primo quod seruatum fuit, dant 53 minuta prima: & quia nullum minutum primum minus 53 minutis primis est aliquid impossibile (reducendo vnum gradum ad 60 minuta prima) sumo 60 minuta prima minus 53 minutis primis, quæ dant 7 minuta prima: itaque in producto scribo 7 minuta prima, & seruo vnum gradum. Rursus vnus gradus seruatus plus 10 gradibus, dant 11 gradus, & 20 gradus minus 11 gradibus dant 9 gradus: itaque in producto scribo 9 gradus: eritque absoluta subtractio proposita: cuius productum continebit 9 gradus cum 7 minutis primis, & 58 minutis secundis.

CAPVT IV.

De multiplicatione numerorum integrorum vulgarium.

Voces multiplicare, & ducere, idem significant: adeo vt idem sit, numerus A ductus in numerum B, & numerus A multiplicatus per numerum B: vt monuimus capite primo.

Numerum vulgarem integrum A, ducere in vulgarem integrum numerum B, est inuenire numerum C, qui oritur ex tot numeris A simul sumptis, siue additis: quot vnitates indicantur à numero B. Vbi aduertendum nihil referre pro multiplicatione, an dati numeri A, & B, sint eiusdem, vel diuersæ speciei. Proposita definitio multiplicationis, conuenit integris numeris vulgaribus; vt habeatur definitio quæ etiam fractos numeros amplectatur: dici posset numerum vulgarem A ducere in vulgarem numerum B, esse idem, ac inuenire numerum C, cuius numerator oriatur ex tot numeratoribus numeri A simul additis, quot vnitates indicantur à numeratore numeri B: denominator vero oriatur ex tot denominatoribus numeri A simul additis, quot vnitates indicantur à denominatore numeri B. Quid sit alicuius numeri numerator, aut denominator, declaratur capite 6. Pro multiplicatione de qua hic agimus, sufficit definitio multiplicationis primo loco proposita: pro qua necesse non est intelligere quid sint vulgarium numerorum numeratores, aut denominatores.

Proposita definitione multiplicationis, exhibeo varios modos siue

siue praxes, quibus inuenitur numerus productus ex multiplicatione duorum numerorum, qui singuli sint vulgares atque integri; & primo quidem propono aliquam multiplicationis praxim satis operosam, atque prolixam: sed tamen consideratione dignam, tum quia deducitur ex ipsa multiplicationis allata definitione, & nihil requirit nisi additionem expositam præcedenti capite: tum etiam quia est fundamentum reliquarum praxium in quibus compendiatæ multiplicationes proponuntur.

Praxis prima, siue prolixior multiplicatio integrorum atque vulgarium numerorum, quæ nihil requirit præter notitiam additionis expositæ superiori capite.

Per ea quæ de additione dicta sunt præcedenti capite, inueniatur productum ex tot numeris A simul additis, quot vnitates indicantur à numero B: atque hoc productum vocetur numerus C; erit numerus C productum ex numero A ducto in numerum B.

Exempli gratia, supposito quod numerus A sit 6 & numerus B sit 3, quia tres numeri 6 simul additi dant 18, productum ex numero 6 ducto in numerum 3, erit 18. Similiter supposito quod numerus A sit 14, & numerus B sit 4: quia quatuor numeri 14 simul additi producunt 56, etiam productum ex numero 14 ducto in numerum 4 erit 56. Pari modo supposito quod numerus A sit 25, & numerus B sit 12: quia duodecim numeri 25 simul additi dant 300, etiam productum ex numero 25 ducto in numerum 12 erit 300. Denique si numerus A sit 25, & numerus B sit 1: quia productum ex vno numero 25 nulli alteri addito est 25, etiam productum ex numero 25 ducto in 1 erit 25

Hæc sufficient pro prima praxi multiplicationis, quæ sola additione absoluitur, & parum vsitata est, ob prolixitatem quam requirit, quoties plane parui non sunt numeri qui proponuntur pro multiplicatione; reliquæ praxes, quæ docent magis vsitatas, atque compendiatas multiplicationes distinguendæ sunt, in eas quæ docent simplicem multiplicationem (in qua simplici multiplicatione vterque datus numerus exprimitur vnica nota Arithmetica) & in praxes quæ docent compositam multiplicationem, in qua singuli ex datis numeris non exprimuntur vnica nota Arithmetica. Compositæ atque compendiatæ multiplicationes vix aliquid requirunt, præter iteratas multiplicationes simplices atque compendiatas; verum hæc simplex, atque compendiata multiplicatio, adeo facilis non est vt nulla prorsus expositione indigeat; pro eius declaratione vsitata est tabula, quam Pythagoricam appellant, quia eius inuentor fuit Pythagoras; vt igitur ordinatè exponam multiplicationes compendiatas, à facilioribus paulatim pergendo ad difficiliora, prius trado, quomodo mediante sola additione construatur tabula pythagorica: deinde doceo mediante hac tabula inuenire productum cuiuscunque simplicis multiplicationis: denique propono, quomodo mediante simplici multiplicatione compendiata, inueniatur productum cuiuscunque propositæ multiplicationis, quæ simplex non est.

Tabulæ Pythagoricæ constructio mediante sola simplici additione.

Tabula Pythagorica.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

TAbulam Pythagoricam hic repræsentatam habes: constructionem eius paucis expono. Primo assumatur quadratum aliquod, subdiuisum in octuaginta, & vnum alia parua quadrata, inter se æqualia: atque in suprema nouem quadratorum serie, à sinistra parte versus dexteram ordine naturali sibi succedant nouem notæ Arithmeticæ, quæ vnam, vel plures vnitates indicant; in singulis quadratis, suprema quadrata deorsum succedentibus, scribatur productum ex additione duorum numerorum, quorum vnus inuenitur in quadrato proximè superiori, alter vero inuenitur in supremo quadrato eiusdem seriei: Exempli gratia in serie quadratorũ deorsum excurrente in qua supremo loco inuenitur numerus 4, secundo loco inuenitur numerus 8, qui producitur ex 4 plus 4, quorum vnus inuenitur in quadrato, quod proximè præcedit illud cui 8 inscribitur, alter verò inuenitur in supremo quadrato eiusdem seriei; quod quadratum supremum, idem est cum quadrato quod proximè præcedit illud cui

inscriptus est numerus 8. in hac eadem serie, tertio loco inuenitur numerus 12, qui producitur ex 8 plus 4 quorum vnus numerus 8 inuenitur in quadrato quod proximè præcedit illud cui 12 inscribitur, alter numerus 4 inuenitur in supremo quadrato eiusdem seriei. Similiter quarto loco inuenitur numerus 16, qui producitur ex 12 plus 4, quorum vnus numerus 12 inuenitur in quadrato, quod proximè præcedit illud cui inscriptus est numerus 16, alter numerus 4 inuenitur in supremo quadrato eiusdem seriei. Pari modo quinto loco inuenitur numerus 20, qui producitur ex 16 plus 4; item sexto loco inuenitur 24 qui producitur ex 20 plus 4. Item septimo loco inuenitur numerus 28 qui producitur ex 24 plus 4. Item octauo loco inuenitur numerus 32 qui producitur ex 28 plus 4. Item nono loco inuenitur numerus 36 qui producitur ex 32 plus 4. Denique quemadmodum hic in exemplo allato patet, quomodo vnius seriei deorsum excurrentis, numeri omnes producantur, simplici atque adeo facillima additione: ita etiam produci numeros cuiusuis alterius seriei deorsum excurrentis, facile est videre ex apposita tabula.

Laminarum Arithmeticarum constructio.

EXpositę constructioni tabulæ Pythagoricæ, plane affinis est, constructio laminarum Arithmeticarum: immo singulæ laminæ Arithmeticæ, propemodum nihil aliud sunt, quam series quadratorum deorsum excurrentium in tabula Pythagorica, aut tabula Pythagorica secta in partes; singulæ enim laminæ Arithmeticæ, à singulis quadratorum seriebus in tabula Pythagorica deorsum excurrentibus, tantum differunt, quod laminarum quadrata, singula, quæ supremum subsequuntur, à diametro diuisa sint in duo triangula: quorum infimum, atque versus dexteram positum, contineat postremam notam quadrato inscriptam: alterum triangulum contineat penultimam notam eidem quadrato inscriptam, si præter vltimam aliqua inscripta sit quadrato; in hunc modum constructam laminam, appellamus laminam Arithmeticam. Vnam huiusmodi laminam Arithmeticam, exhibet figura cui inscripta est littera B: quam conferendo cum serie quadratorum quæ à numero deorsum excurrit in tabula Pythagorica; facilè erit aduertere, verum esse, quod hactenus diximus de laminis Arithmeticis. *Fig. 1.* Præter huiusmodi laminas ex tabula Pythagorica desumptas, aliquæ etiam requiruntur, in quarum supremo quadrato, vna cifra, siue o contineatur: atque deorsum subsequentium quadratorum triangulis inferioribus, eadem cifra, siue o contineatur. Talem laminam repræsentat figura C. Denique requiritur laminarum Arithmeticarum index, quem repræsentat figura A. Hic index plane non differt à prima serie quadratorum, quæ ab vnitate deorsum excurrit in tabula Pythagorica. De numero laminarum nihil hic addo; etenim ex ijs quæ de laminarum vsu dicenda sunt, facilè quiuis colliget, quis laminarum numerus vtilis esse possit; neque enim certus aliquis, atque determinatus laminarum numerus necessarius est; sed talis diuersarum laminarum numerus requiritur, qui sufficiat ad solutionem subsequentis primi problematis. *Fig. 1.*

Laminarum Arithmeticarum vsus longe præstantior est, vsu tabulæ Pythagoricæ; etenim præter eamdem illam commoditatem, quam Arithmeticæ candidatis affert tabula Pythagorica (quæ expleto tyrocinio abijcitur vt inutilis) talem vsum habent laminæ Arithmeticæ: vt mereantur retineri, atque adhiberi, etiam ab ijs qui in Arithmetica maximè versati sunt, sed tamen nolunt inutiliter, aut tempus terere, aut caput defatigare. Laminarum Arithmeticarum vtilitas curruum equorumue vtilitati similis dici posset; suo tempore, & loco, equo, aut curru vehi, maximè commodum est: sed tamen huiusmodi commoditatis necessitas, non leuis incommoditas foret; atque commiseratione dignus haberetur, qui ad ambulandum pedibus suis vti non posset, tametsi suo obsequio promptos haberet equos, aut currus. Pari modo Arithmetico, incomoda, & parum decora foret necessitas laminarum Arithmeticarum: quarum commoditatem nihil melius docet, quam vsus, si suo tempore, & loco adhibeantur: nimirum quando multiplicationum, aut diuisionum multitudo, aut prolixitas, compendium vel subsidium requirit: laminæ enim, omnem propemodum laborem multiplicationibus, aut diuisionibus proprium, tollunt: & in his operationibus eam tantum molestiam relinquunt, quæ additioni, aut subtractioni propria est; vt patebit ex dicendis de vsu laminarum Arithmeticarum. Vt hunc vsum suo loco commodius exponam, proderunt problemata sequentia.

PRO-

PROBLEMA I.

Propositi numeri vulgaris integri, columnam diuisoriam exhibere in laminis Arithmeticis.

QVid sit columna diuisoria, & quomodo construi possit: exponitur in praxi quinta subsequentis capitis. Vt in laminis Arithmeticis, exhibeatur columna diuisoria propositi cuiusuis numeri vulgaris integri; laminarum indici, successiuè versus dexteram ita apponendæ sunt laminæ, vt supremæ illarum notæ, repræsentent propositum numerum. Exempli gratia si propositus sit numerus 39, cuius numeri columna diuisoria exhibenda sit in laminis; indici immediatè apponendo laminam cuius suprema nota est 3: & huic lamini alteram apponendo cuius suprema nota est 9: habebis in laminis exhibitam columnam diuisoriam quæsitam: quam repræsentat figura secunda. *Fig. 2*

PROBLEMA II.

Describere, aut legere, numerum propositæ indicis notæ correspondentem; in columna diuisoria exhibita in laminis Arithmeticis.

VT proposito problemati satisfiat aduertendum duo contiguarum laminarum triangula, eidem indicis notæ correspondentia, simul constituere rhumbum integrum: singula vero triangula esse dimidiatos rhumbos: atque in columna diuisoria à laminis exhibita, singulis indicis notis lateraliter respondere seriem rumborum, quorum primus, & vltimus dimidiatus est; reliqui sunt integri; denique rhumbis contentas notas ad eumdem locum spectare, ad quem spectant rhumbi. Hoc prænotato, vt describatur columnæ in laminis exhibitæ numerus, respondens propositæ indi-

indicis notæ: illud vnum obſeruandum eſt; vt incipiendo à fine, atque addendo notas ad eumdem locum ſpectantes, deſcribatur numerus; qui inuenitur in ſerie rhumborum, quæ reſpondet propoſitæ indicis notæ. Exempli gratia, ex columna diuiſoria in laminis exhibita, atque repræſentata in primo problemate, deſcribendus ſit numerus reſpondens indicis notæ 2; hic numerus erit 78. etenim in ſerie rhumborum correſpondentium indicis notæ 2, poſtremus rhumbus continet notam 8: quæ proinde vltimo loco ſcribenda eſt; præterea penultimus rhumbus, continet duas notas 6 & 1; quæ notæ additæ dant notam 7 penultimo loco ſcribendam. Similiter ex eadem columna deſcriptus numerus qui correſpondet indicis notæ 9: erit 351; quia poſtremus rhumbus continet notam 1, quæ proinde vltimo loco ſcribenda eſt; præterea penultimus rhumbus continet duas notas 7 & 8: quæ notæ additæ dant 15: adeoque penultimo loco ſcribenda nota 5, & altera nota 1 ſeruanda pro antepenultimo loco; denique quia antepenultimus rhumbus continet notam 2, illi addendo ſeruatam notam 1, habetur nota 3; antepenultimo loco ſcribenda.

Ex modo deſcribendi numerum, qui propoſitæ indicis notæ reſpondet in columna diuiſoria exhibita in laminis: facilè patet, quomodo legi poſſit eiuſmodi numerus: nimirum mente faciendo, quod præſcripſimus pro deſcriptione: idque facilè redditur, poſt aliquod exercitium in deſcribendis huiuſmodi numeris.

Praxis ſecunda, ſiue ſimplex atque compendiata multiplicatio integrorum atque vulgarium numerorum, mediante tabula Pythagorica.

EX duobus numeris datis pro ſimplici multiplicatione, ſinguli exprimuntur vnica nota Arithmetica: id enim exigit multiplicatio quæ ſimplex dicitur; ex quo etiam patet quod ſinguli ex datis iſtis numeris inueniri poſſint, tum in ſiniſtra parte tabulæ, tum etiam in ſuprema parte tabulæ; itaque ex datis duobus numeris vnus inueniatur in ſuprema parte tabulæ, alter inueniatur in ſiniſtra parte eiuſdem tabulæ: deinde obſeruetur quadratum commune duabus quadratorum ſeriebus, quarum vna ab inuento in ſuprema parte numero rectà deorſum excurrit, altera vero ab inuento in ſiniſtra parte numero dextrorſum excurrit, obſeruato communi quadrato, inſcriptum inuenies productum propoſitæ ſimplicis multiplicationis. Exempli gratia, ſi dati pro multiplicatione numeri ſint 4 & 5,

pro-

productum multiplicationis erit numerus 20: qui in ſcriptus eſt quadrato communi duabus quadratorum ſeriebus, quarum vna à numero 4 poſito in ſuprema parte tabulæ, rectà deorſū excurrit: altera à numero 5, poſito in ſiniſtra parte tabulæ dextrorſum excurrit. Simili plane modo inuenies quod 4 ductum in 4 det 16. Item quod 7 ductum in 5 det 35. item quod 8 ductum in 7 det 56. item quod 8 ductum in 9 det 72. atque ita de cæteris: neque eſt poſſibilis vlla multiplicatio ſimplex numerorum integrorum atque vulgarium, cuius productum non exhibeat tabula Pythagorica, adhibita modo hic propoſito.

Vt ex propoſita ſimplici, atque compendiata multiplicatione, gradum faciam, ad reliquas, hoc eſt compoſitas, atque compendiatas multiplicationes: diſtinguo duos diuerſos caſus qui poſſunt occurrere; primus eſt, quando ex datis pro multiplicatione numeris, vnus quidem pluribus notis Arithmeticis indicatur, alter verò exprimatur vnica nota Arithmetica. Secundus eſt, quando ex datis pro multiplicatione numeris, vterque ſcribitur pluribus notis Arithmeticis. Vtroque caſu multiplicatio aſt compoſita: in primo tamen caſu, vix aliud requiritur quam iterata ſimplex multiplicatio: quemadmodum vero in primo caſu productum inuenitur per iteratam ſimplicem multiplicationem, ſic in ſecundo caſu, productum inuenitur per iteratam multiplicationem primi caſus; de primo caſu agitur in tertia & quarta praxi; quinta praxis, agit de ſecundo caſu.

Praxis tertia, ſiue multiplicatio compendiata duorum numerorum integrorum, atque vulgarium quorum vnus vnica: alter pluribus notis Arithmeticis exprimitur.

QVis ex duobus numeris datis pro multiplicatione vocetur ſuperior, vel inferior, parum refert: quoniam igitur liberum eſt, ex datis duobus numeris quemlibet pro inferiori aſſumere: ille vocetur inferior, qui vnica nota Arithmetica exprimitur, alter vero appelletur ſuperior; quo poſito,

Primo per praxim ſecundam (hoc eſt per ſimplicem multiplicationem) inueniatur productum ex inferiori numero ducto in notam vltimam ſuperioris numeri, atque huius producti vltima nota, vltimo loco ſcribatur in producto quod quæritur, reliquæ notæ ſeruentur pro penultimo loco. Secundo, inueniatur productum ex infe-

inferiori numero ducto in penultimam notam superioris numeri, atque huic producto addatur, quod pro penultimo loco seruatum fuit, & in hunc modum inuenti numeri vltima nota penultimo loco scribatur in producto quod quæritur. Denique in hunc modum successiue operando circa singulas notas superioris numeri, paulatim colliges omnes notas quibus indicatur productum quod quæritur.

Pro exemplo multiplicationis de qua hic agimus propositi sint duo numeri A & B. ita vt numerus A constet pluribus notis Arithmeticis, & numerus B vnica nota exprimatur; numerus A sit 53072; numerus B sit 4. Hos datos numeros A & B, scribere vt hic repræsentantur commodum est, non tamen necessarium; infra lineam repræsentatur propositæ multiplicationis productum, quod quæritur; vt hoc productum inueniam ita practicè discurro: 4 ductum in 2 dat 8, itaque in producto quæsito vltimo loco scribo 8 & nihil seruo. Rursus 4 ductum in 7 dat 28., & 28 plus 0 prius seruato dat 28, itaque in producto quæsito penultimo loco scribo 8, & seruo 2. Rursus 4 ductum in 0 dat 0, & 0 plus 2 prius seruato dat 2, itaque in producto quæsito tertio loco à fine scribo 2, & nihil seruo. Rursus 4 ductum in 3 dat 12, & 12 plus 0 siue nihilo seruato dat 12, itaque in producto quæsito quarto loco à fine scribo 2, & seruo 1. Rursus 4 ductum in 5 dat 20, & 20 plus 1 prius seruato dat 21, itaque in producto quæsito quinto loco à fine scribo 1, & seruo 2. Denique quia in superiori numero A non inuenitur vlla nota circa quam possit continuari operatio; nota Arithmetica 2, seruata pro sexto loco à fine, scribitur in producto quæsito, loco illi debito siue sexto à fine; atque ita erit absoluta multiplicatio proposita, cuius productum erit numerus 212288.

5 3 0 7 2.	A
4.	B
2 1 2 2 8 8	

Praxis quarta, siue multiplicatio compendiata duorum numerorum integrorum atque vulgarium: quorum vnus, vnica, alter pluribus notis Arithmeticis exprimitur: mediante columna diuisoria exhibita in laminis Arithmeticis.

PRimo. Per problema primum propositum pag. 21. in laminis Arithmeticis exhibeatur columna diuisoria numeri qui proponitur multiplicandus. Deinde in indice columnæ diuisoriæ inuenia-

tur

tur nota per quam propositus numerus multiplicandus est, atque inuentæ notæ correspondens columnæ numerus describatur vt docetur prob. 2. pag. 21. sic enim habebitur productum propositæ multiplicationis.

Exempli gratia numerus 39 multiplicandus sit per numerum 8. Columna diuisoria in laminis exhibita erit illa quæ exhibetur in figura secunda. Deinde nota in indice quærenda erit 8: atque huic notæ correspondens columnæ numerus descriptus iuxta problema 2. erit 312; adeoque verum erit, quod 39 ductum in 8 producat 312.

Praxis quinta, siue multiplicatio compendiata duorum numerorum integrorum, atque vulgarium, quorum vterque pluribus notis Arithmeticis exprimitur.

PRimo per tertiam, vel quartam praxim, inueniatur productum ex postrema nota numeri inferioris, ducta in totum numerum superiorem: atque hoc productum ita scribatur, vt illi alia producta, decussatim, atque ordinatè subscribi possint. Similiter inueniatur productum ex penultima nota numeri inferioris, ducta in totum numerum superiorem: atque hoc productum prius inuento producto decussatim, atque ordinatè subscribatur. Pari modo successiuè inuenienda sunt producta ex singulis alijs notis inferioris dati numeri, ductis in totum numerum superiorem: atque inuenta producta, decussatim, atque ordinatè subscribenda sunt, prius inuentis productis. Denique omnia producta decussatim, atque ordinatè scripta simul addita, vt docetur capite secundo, dabunt productum multiplicationis propositæ.

Notandum hic quid intelligendum sit per decussatam, aut ordinatam partialium productorum scriptionem, quando dicitur partialia producta singula, inuenta per præcedentes praxes, decussatim, atque ordinatè scribenda esse. Singula illa producta partialia erunt decussatim scripta, si singulorum productorum partialium postremâ nota, deorsum, correspondeat notę inferioris dati numeri, ex qua producitur. Deinde singula illa producta partialia erunt ordinatè scripta, si singulis notis producti partialis superiori loco scripti, respondeat tantum vna nota producti partialis scripti inferiori loco; vltimæ tamen notæ superiori loco scripti producti partialis, non respondet vlla nota producti partialis immediatè subscripti, quando illa producta decussatim scripta sunt. In subse-

quenti

quenti exemplo numeri C, D, E, decussatim atque ordinatè scripti repræsentantur.

Pro exemplo multiplicationis de qua hic agitur, datus numerus A sit 4 5 6 2: alter datus numerus B sit 7 5 3. Scriptis prius numeris datis A & B, vt hic repræsentantur, practicè discurrendo, vt docuimus in tertia praxi, vel sine discursu illo practico, vt docetur in quarta praxi, inuenio, 3 ductum in totum numerum A dare numerum 1 3 6 8 6, siue partiale productum C. Rursus eodem modo inuenio, 5 ductum in totum numerum A dare numerum 2 2 8 1 0, siue partiale productum D. Similiter inuenio 7 ductum in totum numerum A, dare numerum 3 1 9 3 4, siue partiale productum E: quæ singula producta partialia hic habes decussatim, atque ordinatè scripta. Denique producta partialia C, D, E, simul addendo, vt docetur capite secundo, habetur totale productum propositæ multiplicationis, nimirum numerus F, siue 3 4 3 5 1 8 6.

4 5 6 2.	A
7 5 3.	B
1 3 6 8 6.	C
2 2 8 1 0.	D
3 1 9 3 4.	E
3 4 3 5 1 8 6.	F

Pro complemento eorum quæ hactenus dicta sunt de muliplicatione, vtiles erunt subsequentes reflexiones.

Reflexio prima. Si aliquot postremæ notæ alicuius numeri propositi pro multiplicatione sint cifræ, siue 0. istæ cifræ omnes negligi possunt in multiplicatione: siue in dato superiori, siue in dato inferiori numero inueniantur; dummodo cifræ in ipsa multiplicatione neglectæ, omnes successiuè adscribantur inuento producto. exempli gratia, si 200 duci debeat in 3000 neglectis cifris quas nulla alia nota subsequitur, reliquus numerus 2 ductus in reliquum numerum 3 producet 6: huic producto successiuè adscribendo neglectas quinque cifras, habebitur numerus 600000: quare 200 ductum in 3000 producit 600000.

Reflexio secunda. Si inferior numerus datus pro multiplicatione contineat cifras alijs notis permixtas: negligi possunt istæ cifræ, dummodo partialia producta genita ex reliquis notis inferioris dati numeri, ordinatè atque decussatim scribātur. Exēemplum eius, quod in reflexione dicitur, repræsentatur in apposita multiplicatione ordinatim scripta: in qua 3 0 0 2 ductum in 2 4 6 1 7 producit 7 3 9 0 0 2 3 4.

2 4 6 1 7
3 0 0 2
4 9 2 3 4
7 3 8 5 1
7 3 9 0 0 2 3 4

Re-

Reflexio tertia. Licet multiplicatio absolui possit per iteratam aditionem; tamen, toto vt ita dicam cælo, ab additione differt multiplicatio. Hoc imprimis constat ex ipsis definitionibus additionis, atque multiplicationis superius à nobis propositis. Deinde impossibile est, vt productum ex additione vulgarium numerorum, non sit maius quolibet genitore dato pro multiplicatione; verum productum ex multiplicatione non est semper maius quolibet genitore dato pro multiplicatione; sed subinde est maius, subinde æquale, subinde minus. Exempli gratia 2 ductum in 3 producit 6: quo casu productum ex multplicatione est maius quolibet genitore dato pro multiplicatione. 1 ductum in 1 producit 1; quo casu productum ex multiplicatione æquatur cuilibet genitori dato pro multiplicatione. 2 ductum in 1 producit 2; quo casu productum ex multiplicatione æquatur vni ex genitoribus datis pro multiplicatione. Præterea ex dicendis de multiplicatione numerorum fractorum vulgarium, constabit, quod 2 ductum in $\frac{1}{2}$ producat $\frac{2}{2}$ siue 1; quo casu productum ex multiplicatione est minus vno genitore dato pro multiplicatione, sed maius altero genitore. $\frac{1}{2}$ ductum in $\frac{1}{3}$ producit $\frac{1}{6}$: quo casu productum ex multiplicatione est minus quolibet genitore dato pro multiplicatione. Hinc facilè colliges, numerum A, ducere in numerum B, non esse idem ac numerum A, vel numerum B aliquoties sumere; quilibet enim numerus aliquoties sumptus necessario maior est numero qui aliquoties sumitur: quare si numerum aliquoties sumere, esset idem ac multiplicare talem numerum; etiam productum ex multiplicatione deberet esse maius numero qui multiplicatur.

CAPVT V.

De diuisione numerorum integrorum vulgarium.

Numerum C diuidere per numerum B, est inuenire numerum A, qui ductus in numerum B producat numerum C.

Pro diuisione nihil refert vtrum dati duo numeri sint eiusdem vel diuersæ speciei.

Propoſita definitione diuiſionis Arithmeticæ, exhibeo varios modos, ſiue praxes diuerſas, quibus abſoluitur diuiſio duorum numerorum vulgarium qui ſinguli integri ſint, atque inuenitur productum ex quibuslibet duobus eiuſmodi numeris. Et primo quidem propono praxim qua vtitur vulgaris Arithmetica, vt inueniat, ſiue exhibeat diuiſionis productum, quando numerus diuidendus minor eſt ipſo diuiſore. In reliquis praxibus, agitur de diuiſione, in qua numerus diuidendus non eſt maior diuiſore. Ex his praxibus, quæ ſecundo, & tertio loco proponuntur, operoſæ ſunt atque prolixæ, ac propterea minus vſitatæ; vtiles tamen non tantum ad profundiorem intelligentiam naturæ ipſius diuiſionis, atque reliquarum praxium: verum etiam pro ijs qui non amant compendia; in praxibus quæ tertiam ſubſequuntur, proponuntur diuiſiones compendiatæ, vel ſimplices, vel compoſitæ; tres diuiſiones ſimplices, atque compendiatæ inter ſe diuerſæ, proponuntur in quarta, quinta, & ſexta praxi, in ſingulis modo aliquantulum diuerſo, ſuperatur difficultas compendiatæ diuiſionis, quæ & ſimplici, & compoſitæ diuiſioni compendiatæ communis eſt, ac planæ præcipua, immo propemodum vnica quæ inuenitur in compendiata diuiſione: quandoquidem pro compoſitis, atque compendiatis diuiſionibus, vix aliud requiratur, quam iterata ſimplex, atque compendiata diuiſio; vt patebit ex praxibus quæ ſextam ſubſequuntur, in quibus docetur diuiſio compendiata, atque compoſita.

Praxis prima, ſiue diuiſio integrorum, atque vulgarium numerorum, quando diuiſor eſt maior numero diuidendo.

EX datis duobus numeris ſuperior, ſiue diuidendus, ſcribatur ſupra lineolam, cui ſubſcriptus ſit diuiſor; hæc ſcripſio exhibebit productum propoſitæ diuiſionis.

Tam hic, quam in ſequentibus, quoties in eadem linea vnus numerus alteri ſubſcriptus inuenitur, ſubintelligi debet lineola duos iſtos numeros ſeparans: etenim paſſim omiſſa eſt; quia commode typis exprimi nō poterat.

Exempli gratia numerus diuidendus ſit 4, diuiſor ſit 10. ſcriptio $\frac{4}{10}$ exhibebit productum diuiſionis propoſitæ, eritque verum, quod 4 diuiſum per 10 producat $\frac{4}{10}$ ſimiliter verum erit quod 27 diuiſum per 29 producat $\frac{27}{29}$. De modo legendi huiuſmodi ſcriptiones, fractos numeros repræſentantes, & de fractorum numerorum ſignificatione, agemus capite 6.

No-

Notandum hic eſt, ſcriptionem propoſitam non tantum adhiberi in vulgari Arithmetica, in caſu propoſito, nimirum, vt exhibeatur productum diuiſionis in caſu in quo diuiſor eſt maior numero diuidendo: verum etiam, quoties ex quauis alia diuiſione circa integros ac vulgares numeros inſtituta, remanet aliquod reſiduum diuiſionis; etenim notis Arithmeticis productis ex diuiſione, ſucceſſiue adſcribitur diuiſionis reſiduum, ſed ſupra lineolam cui ſubſcriptus ſit diuiſor. Exempli gratia, ſuppoſito quod numerus diuidendus ſit 23, & diuiſor ſit 4; nota producta ex diuiſione erit 5, diuiſionis reſiduum erit 3, totumque productum erit $5\frac{3}{4}$; eritque verum, quod 23 diuiſum per 4 producat $5\frac{3}{4}$. Similiter 7 diuiſum per 3 producit $2\frac{1}{3}$. Atque vniuerſaliter, quoties ex diuiſione remanet aliquod reſiduum, vt habeatur productum diuiſionis, ſemper diuiſionis reſiduum, ſcriptum ſupra lineola cui diuiſor ſubſcriptus ſit, ſucceſſiuè apponitur notis Arithmeticis productis ex diuiſione.

Praxis ſecunda, ſiue prolixior diuiſio integrorum, atque vulgarium numerorum, quæ nihil requirit præter notitiam additionis expoſitæ ſecundo capite.

EX datis pro diuiſione numeris, ſuperior, ſiue diuidendus ſit C. Inferior, ſiue diuiſor ſit B; hoc poſito ſucceſſiue ſimul addendo plures, & plures numeros B inueniatur numerus D qui ſit æqualis vel proxime minor numero C; notæ Arithmeticæ indicantes quot numeri B fuerint ſimul additi, ad producendum numerum D; erunt notæ productæ ex propoſita diuiſione; diuiſionis reſiduum, erit differentia numerorum C & D; quare ſi notis productis ex diuiſione, ſucceſſiue adſcribatur inuentum diuiſionis reſiduum, vt dicitur in prima praxi, habebis productum propoſitæ diuiſionis. Exempli gratia numerus diuidēdus C ſit 50, diuiſor B ſit 12: hoc poſito, 12 plus 12 dant 24, & iterum 24 plus 12 dant 36, rurſus 36 plus 12 dant 48, cui non poteſt amplius addi 12, quin fiat maior quam 50: adeoque numerus 48 eſt proximè minor dato ſuperiori numero 50. Deinde quia numerus 48 productus eſt ex quatuor numeris 12 ſimul additis, etiam nota 4 eſt illa quæ producitur ex propoſita diuiſione. Denique propoſitæ diuiſionis reſiduum eſt 2, quia inuento numero 48 debet addi 2 vt æquetur numero 50; igitur propoſitæ diuiſionis productum eſt $4\frac{2}{12}$.

Pra-

Praxis tertia, siue prolixior diuisio integrorum, atque vulgarium numerorum, quæ nihil requirit præter notitiam subtractionis expositæ tertio capite.

Ex datis pro diuisione numeris, superior, siue diuidendus sit C; inferior, siue diuisor sit B; hoc posito, diuisor B subtrahatur ex numero C, & rursus ex residuo huius subtractionis, subtrahatur diuisor B; atque hoc modo subtractiones continuentur donec relinquatur residuum minus ipso diuisore; notæ Arithmeticæ indicantes quoties diuisor B subtractus fuerit, erunt notæ productæ ex proposita diuisione; inuentum vltimum subtractionis residuum ipso diuisore minus, erit residuum propositæ diuisionis, & habebitur productum propositæ diuisionis, si notis productis ex diuisione adscribatur residuum, vt dicitur in prima praxi.

Exempli gratia numerus diuidendus C sit 50. diuisor B sit 12: hoc posito, 50 minus 12 dat 38; & iterum 38 minus 12 dat 26. Rursus 26 minus 12 dat 14. Rusus 14 minus 12 dat 2, quod residuum est minus ipso diuisore; quandoquidem verò diuisor successiue quater subtractus fit ex numero diuidendo, nota Arithmetica 4, est illa, quæ producitur ex proposita diuisione: eiusdemque diuisionis residuum est 2; quare propositæ diuisionis productum erit $4\frac{2}{12}$.

Duæ paxes diuisionis: hic propositæ, parum vsitatæ sunt, propter prolixitatem quam requirunt quoties plane parui non sunt numeri qui proponuntur pro diuisione; subsequentes diuisionis praxes docent magis compendiatas, atque vsitatas diuisiones: pro his (vt in alijs operationibus factum est) distinguo diuisionem in simplicem, & compositam; hoc est in diuisionem producentem vnicam notam Arithmeticam, & diuisionem producentem plures notas Arithmeticas; compositæ diuisiones compendiatæ, parum admodum requirunt, vltra iteratas simplices, atque compendiatas diuisiones: simplex atque compendiata diuisio subinde quidem facilis est, subinde tamen satis molesta est atque difficilis; hinc varias propono praxes quibus absoluitur simplex atque compendiata diuisio: vt ex pluribus, illa possit adhiberi, quæ vel propter facilitatem, vel propter compendium, vel quouis alio ex capite cuilibet magis arridebit. In diuersis circumstantijs, singulæ aliquam prærogatiuam habent; quæ in quarta diuisionis praxi proponitur vtitur tabula Pythagorica, atque vsu receptum est eam proponere incipientibus discere Arithmeticam practicam; parum tamen prodest quando diui-

diuisor pluribus notis exprimitur. Reliquæ duæ, quæ in quinta, & sexta praxi proponuntur, tales sunt, vt reuera ignorem quænam alteri debeat præferri, licet enim illa, quæ in quinta praxi proponitur subinde aliquem quasi inutilem laborem requirat, pro constructione columnæ diuisoriæ qua vtitur: subinde tamen, ipsius columnæ constructio (saltem pro diuisionibus compositis ad quas ordinatur hæc simplex diuisio) non contemnendum compendium affert; & propemodum liberat omni periculo, incurrendi in errorem, cui maximè exposita est simplex diuisio quæ in sexta praxi proponitur, hæc tamen talis est, vt eius ignorantia maximè dedeceret Arithmeticum practicum: quippe apud eos, qui vtuntur practica Arithmetica, maximè vsitata est: quia non semper quidem, sed tamen ordinariè maius affert compendium: ipsa verò operationum compendia tanti fiunt, vt plerumque longioribus praxibus magis compendiatæ præferantur, licet maiores difficultates annexas habeant.

Praxis quarta, siue simplex diuisio numerorum integrorum vulgarium, mediante tabula Pythagorica: supposito tamen, quod diuisor constet vnica nota Arithmetica.

In suprema parte tabulæ Pythagoricæ inueniatur propositus diuisor: deinde inter numeros inuento diuisori deorsum correspondentes, obseruetur numerus, dato numero superiori æqualis, vel proximè minor, si nullus æqualis inueniatur; obseruato in hunc modum numero, correspondens nota Arithmetica posita in sinistra parte tabulæ, erit nota producta ex proposita diuisione: atque obseruatus in tabula numerus subtractus ex dato superiori numero dabit residuum propositæ diuisionis; denique si notæ productæ ex diuisione, adscribatur residuum diuisionis (vt dicitur in prima praxi) habebitur productum propositæ diuisionis.

Exempli gratia, supposito quod numerus diuidendus sit 56, & diuisor sit 7 inuenies diuisori 7, scripto in suprema parte tabulæ, deorsum respondere numerum 56; & quia huic numero, in sinistra parte tabulæ, respondet 8; etiam nota 8, erit illa quæ producitur ex proposita diuisione; præterea quia inuentus in tabula numerus 56 subtractus à numero diuidendo, qui etiam est 56, nullum relinquit residuum: productum propositæ diuisionis erit 8: atque 56 diuisum per 7 dat 8. Similiter supposito quod numerus diuidendus sit 59 ſit 59, quodque diuiſor ſit 7: inuenies diuiſori 7 ſcripto in ſuprema parte tabulæ, deorſum nuſquam reſpondere numerum diuidendum 59, illo tamen proximè minorem eſſe numerum 56; cui iterum in ſiniſtra parte tabulæ reſpondens nota 8, erit nota producta ex diuiſione: & quia 59 minus 56 dat 3, etiam reſiduum diuiſionis erit 3; ac denique 59 diuiſum per 7 dabit $8\frac{3}{7}$.

Praxis quinta, ſiue diuiſio compendiata, ac ſimplex numerorum integrorum, atque vulgarium, mediante columna diuiſoria.

PRo praxi quam hic tradimus requiritur columna diuiſoria, hanc columnam diuiſoriam in laminis Arithmeticis commodè exhibere, docuimus ſuperiori capite; hic vero independenter à laminis Arithmeticis, columnæ diuiſoriæ conſtructionem prius expono duplici diuerſo modo: primo quidem mediante ſola additione tradita capite ſecundo: deinde mediante multiplicatione tradita capite quarto. Denique expoſita cõſtructione columnæ diuiſoriæ; propono eius vſum, & praxim diuiſionis ſimplicis in qua adhibetur columna diuiſoria.

Columnæ diuiſoriæ conſtructio, mediante ſola additione, hæc eſt: primo, ordine naturali ſucceſſiue, atque deorſum excurrentes ſcribantur nouem notæ Arithmeticæ indicantes vnam, vel plures vnitates, atque hæc notarum ſeries vocetur index columnæ diuiſoriæ. Deinde indicis notæ 1, lateraliter adſcribatur propoſitus diuiſor exempli gratia 39. Item indicis notæ 2, lateraliter adſcribatur productum ex numero proximè ſuperiori qui eſt 39, addito diuiſori qui etiam eſt 39, quod productum eſt 78. Rurſus indicis notæ 3 lateraliter adſcribatur, productum ex numero proximè ſuperiori qui eſt 78 addito diuiſori qui eſt 39, hoc productum eſt 117. Rurſus indicis notæ 4, lateraliter adſcribatur, productum ex numero proximè ſuperiori, qui eſt 117, addito diuiſori qui eſt 39, quod productum eſt 156. Simili planè modo indicis notæ 5, lateraliter adſcribitur 195, quia 156 plus 39 dant 165. Item indicis notæ 6, lateraliter adſcribitur 234, quia 195 plus 39 dant 234. Item indicis notæ 7 lateraliter adſcribitur 273, quia 234 plus 39 dant 273. Item indicis notæ 8, lateraliter adſcribitur 312, quia 273 plus 39 dant 312.

1.	39.
2.	78.
3.	117.
4.	156.
5.	195.
6.	234.
7.	273.
8.	312.
9.	351.

Denique indicis notæ 9. lateraliter adſcribitur 351, quia 312 plus 39 dant 351. Hæc columnæ diuiſoriæ conſtructio, conuenit cum conſtructione tabulæ Pythagoricæ mediante additione: differt tantum, quod pro tabula Pythagorica ſufficiat ſimplex additio, pro columna diuiſoria requiratur aditio compoſita, quoties diuiſor exprimitur pluribus notis Arithmeticis.

Columnæ diuiſoriæ conſtructio mediante multiplicatione, hæc eſt. Primo vt paulò ante dictum eſt, ponatur index columnæ diuiſoriæ. Deinde cuilibet indicis notæ lateraliter adſcribatur; productũ, ex indicis nota ducta in diuiſorem, Exempli gratia, poſito quod diuiſor ſit 39 indicis notæ 1, lateraliter reſpondebit 39: quia 1 ductum in 39 dat 39; indicis notæ 2, lateraliter reſpondebit 78: quia 2 ductum in 39 dat 78: indicis notæ 3, lateraliter reſpondebit 117: quia 3 ductum in 39 dat 117. Indicis notæ 4, lateraliter reſpondebit 156, quia 4 ductum in 39 dat 156; atque ita de cæteris

Diuiſio compendiata ac ſimplex, mediante columna diuiſoria, ita abſoluitur. Primo conſtruitur columna diuiſoria, in qua indicis notæ 1 reſpondet propoſitus diuiſor; vel certè talis columna exhibetur in laminis Arithmeticis iuxta problema 2 capitis 4. Deinde inter columnæ numeros, obſeruatur aliquis numerus, diuidendo numero æqualis, vel certè proximè minor, ſi deſit æqualis: obſeruato columnæ numero correſpondens indicis nota, erit nota producta ex propoſita diuiſione: atque obſeruatus columnæ numerus, ſubtractus ex numero diuidendo, dabit reſiduum propoſitæ diuiſionis: quare ſi notæ productæ ex diuiſione, adſcribatur inuentum diuiſionis reſiduum (vt dicitur in prima praxi) habebitur propoſitæ diuiſionis productum.

Exempli gratia, propoſitus numerus diuidendus ſit 299, diuiſor ſit 39; numero diuidendo proximè minor columnæ numerus erit 273, cui reſpondet indicis nota 7: quare nota producta ex propoſita ſimplici diuiſione erit 7; præterea, quia 299 minus 273 dat 26: propoſitæ diuiſionis reſiduum erit 26 atque adeo numerus 299 diuiſus per numerum 39, dabit productum $7\frac{26}{39}$

Non erit inutile circa propoſitam diuiſionis praxim notare; primo, quod hæc quinta praxis non differat à quarta praxi, niſi quod quarta praxis non adhibeat niſi columnas, vt ita dicam, diuiſorias, repræſentatas in tabula Pythagorica; verum quinta praxis, præter eaſdem columnas diuiſorias repræſentatas in tabula Pythagorica, adhibet quaſcunque alias: & dici poſſe in quinta praxi propoſitam diuiſionem, nihil aliud eſſe, quam diuiſionem in quarta prax. propositam, sed ampliatam, atque reductam ad maiorem vniuersalitatem; etenim quartæ praxeos diuisio, restricta est ad solas diuisiones, in quibus diuisor exprimitur vnica nota Arithmetica: quinta praxeos diuisio, nullo modo restricta est, sed amplectitur quaslibet simplices vulgarium, atque integrorum numerorum diuisiones. Secundo notari potest, quod cum sola additione construi possit quælibet columna diuisoria, atque in praxi quæ adhibet columnam diuisoriam, nulla vnquam multiplicatio instituenda sit vt absoluatur proposita simplex, atque compendiata diuisio: etiam quælibet compendiata diuisio, absolui potest, absque omni difficultate, quæ non inuenitur in additione, aut subtractione; siue per solam iteratam additionem, aut subtractionem: etenim pro columnæ constructione sufficit iterata additio: pro simplicis diuisionis residuo inueniendo, sufficit subtractio; notam productam ex simplici diuisione, immediate exhibet columna, igitur pro simplici diuisione quæ mediante columna absoluitur, sufficit additio, & subtractio, neque requiritur vlla multiplicatio. Denique pro diuisionibus compositis, sufficit simplex diuisio sæpius iterata, vt patebit ex diuisione compendiata, atque composita quæ proponitur in septima praxi diuisionis: igitur pro qualibet diuisione, quæ mediante columna diuisoria absoluitur, sufficit additio, & subtractio, neque requiritur vlla multiplicatio.

Praxis sexta, siue diuisio compendiata, & simplex, numerorum integrorum vulgarium.

IN hac praxi, prudenti consideratione, propositi numeri diuidendi atque diuisoris, inueniendum est, quoties diuisor contineatur in numero diuidendo; quod subinde difficile est: etiam iis qui commode versati sunt in practica Arithmetica; vt hæc difficultas aliquo modo subleuetur (independenter ab iis, quæ in præcedentibus praxibus allata sunt) prodesse possunt, quæ hic subiicio notanda.

Notandum primo. Impossibile est, vt diuisor simplicis diuisionis plus quam nonies contineatur in numero diuidendo, vt patet ex definitione diuisionis simplicis. Deinde nota Arithmetica, indicans quoties totus diuisor contineatur in toto numero diuidendo, dicitur nota producta ex tali simplici diuisione.

Notandum secundo, Si in diuisore, & numero diuidendo, æque multæ notæ versus dexteram positæ negligantur: nota indicans quo-

quoties reliquus diuisor contineatur in reliquo numero diuidendo, proxime etiam indicat, quoties contineatur totus diuisor, in toto numero diuidendo. Exempli gratia, supposito quod numerus diuidendus sit 3 8 2 4, quodque diuisor sit 8 4 2: vtrobique negligendo postremas duas notas, reliquus numerus diuidendus erit 3 8. & reliquus diuisor erit 8; præterea sicut reliquus diuisor 8, continetur quater in reliquo numero diuidendo 3 8: ita proxime totus diuisor 8 4 2, continetur quater in toto numero diuidendo 3 8 2 4; dixi proxime continetur, licet enim in allato exemplo verum sit, quod totus diuisor 8 4 2 contineatur quater in toto numero diuidendo: id tamen falsum foret, si manente eodem diuisore 8 4 2 numerus diuidendus foret 3 3 2 4: quo casu negligendo vtrobique duas vltimas notas, reliquus diuisor 8, in reliquo numero diuidendo 3 3 continetur quater: sed tamen totus diuisor 8 4 2, non nisi tertio continetur in toto numero diuidendo 3 3 2 4.

Notandum tertio. Assumpta nota aliqua Arithmetica, est maior quam nota producta ex simplici diuisione: si assumpta nota ducta in diuisorem, producat numerum maiorem numero diuidendo. Assumpta nota Arithmetica, est minor, quam nota producta ex simplici diuisione: si assumpta nota ducta in diuisorem subtrahatur ex numero diuidendo, atque huius subtractionis productum sit æquale, vel maius diuisore. Exempli grat. a, numerus diuidendus sit 27 diuisor sit 4: his positis assumpta sit nota Arithmetica 7: quia 7 ductum in 4 dat 28, qui numerus est maior proposito numero diuidendo 27, legitime infertur, notam 7 esse maiorem; quam sit nota quæ producitur ex numero 27 diuiso per 4. Rursus assumpta sit nota Arithmetica 5; quia 5 ductum in 4 dat 20, & insuper 27 minus 20 dat numerum 7, qui maior est diuisore 4: legitime infertur, notam 5 esse minorem, quam sit nota quæ producitur ex numero 27 diuiso per 4.

Vt per praxim de qua hic agimus inueniatur productum simplicis diuisionis. Primo, ex consideratione numeri diuidendi atque diuisoris, dirigentibus iis quæ monuimus notanda esse, inuenienda est nota Arithmetica producta ex proposita simplici diuisione: hoc est nota indicans quoties diuisor contineatur in numero diuidendo. Deinde inuenta nota Arithmetica duci debet in diuisorem, atque huius multiplicationis productum subtractum à numero diuidendo dabit residuum propositæ simplicis diuisionis. Denique, notæ producta ex diuisione adscribendo eiusdem diuisionis residuum (vt dicitur in prima praxi) habebitur productum quæsitum.

Exempli gratia, propositus numerus diuidendus sit 299; diuisor

 sit 39

fit 39; primo inquirendo quoties diuisor 39 contineatur in numero diuidendo 299 quod difficilius est, vel iuxta secūdum notandū; inquirendo quoties 3 contineatur in 29, quod errori obnoxium est; inueniri debet, notam 7 esse illam quæ producitur ex numero 299 diuiso per 39. Deinde quia 7 ductum in 39 dat 273: & insuper 299 minus 273 dat 26: erit numerus 26 residuum propositæ diuisionis: atque adeo numerus 299 diuisus per numerum 39 dabit productum $7\frac{26}{39}$.

In proposito exemplo insinuamus duos modos inueniendi notam productam ex diuisione; primus est, inquirendo quoties diuisor 39 contineatur in numero 299; secundus modus est, inquirendo quoties 3 contineatur in numero 29 primum modum difficiliorem esse satis patet, quandoquidem non ita clarè appareat, quoties 39 contineatur in 299: quam quoties 3 contineatur in 29. Secundum modum qui facilior est, errori obnoxium esse patet ex secundo notando: quoties tamen hoc secundo modo inquirendo notam productam ex diuisione, aberratur: ipse error facilè detegitur, ex ijs quæ necessaria sunt ad inueniendum diuisionis residuum: vt hoc residuum habeatur, necesse est, & notam ex diuisione productam ducere in diuisorem, & insuper huius multiplicationis productum subtrahere ex numero diuidendo: quæ subtractio fieri non poterit, vel certè eius productum erit æquale aut maius diuisore, si erratum fuit circa notam productam ex diuisione: circa quam aliter aberrari non potest, quam pro ipsa assumendo aliam notam maiorem scilicet, vel minorem; iam verò si nota maior fuerit assumpta, in diuisorem ducta subtrahi non poterit ex numero diuidendo, quia tale productum erit necessario maius numero diuidendo; si verò minor nota fuerit assumpta, necessariò inuentum diuisionis residuum erit æquale vel maius ipso diuisore: vt constat ex tertio notando.

Expositis varijs praxibus simplicis, atque compendiatæ diuisionis: venio ad diuisiones compositas atque compendiatas: pro quibus vix aliquid requiritur, præter iteratas diuisiones simplices; etenim quælibet diuisio composita, tot diuersis simplicibus diuisionibus absoluitur, quot notæ diuersæ producuntur ex composita diuisione: singulæ enim notæ productæ ex composita diuisione, inueniuntur per singulas, atque diuersas simplices diuisiones, in his simplicibus diuisionibus, diuisor semper idem remanet, sed numeri diuidendi diuersi sunt, nimirum partes, siue membra totius numeri, qui per compositam diuisionem diuidendus proponitur; nam per membrum numeri diuidendi, intelligi debet, pars numeri diuidendi, quæ diuisa per totum diuisorem, vnicam diuisionis notam

pro-

producit: ex his membris numeri diuidendi, primum dicitur, illud, ex quo per simplicem diuisionem producitur prima nota numeri producti ex diuisione; secundum membrum dicitur illud, ex quo per simplicem diuisionem producitur secunda nota; tertium membrum dicitur, illud, ex quo per simplicem diuisionem producitur tertia nota; atque ita de cæteris. Quemadmodum verò simplex diuisio non nisi vnicam notam producit, ita totus numerus diuidendus simplici diuisione, vnicum membrum constituit: hinc pro simplici diuisione, necesse non fuit agere de membris numeri diuidendi: pro compositis diuisionibus necesse est distinguere illa membra, & scire modum, quo membra illa inueniuntur; atque hoc vnum est quod pro compositis diuisionibus compendiatis requiritur, vltra ea quæ de simplicibus atque compendiatis diuisionibus dicta sunt. De inuentione membrorum numeri diuidendi agunt proximè subsequentes duæ reflexiones, quæ necessariæ quidem sunt, sed nullis difficultatibus implicatæ, & tam faciles vt pro singulis simplex reflexio videatur sufficere.

Reflexio prima. Vt habeatur primum membrū numeri diuidendi: ex numero qui diuidendus proponitur, incipiendo à dextera parte versus sinistram, accipiuntur tot notæ Arithmeticæ, quot requiruntur ad constituendum numerum æqualem, vel proximè maiorem diuisore, si æqualis haberi non possit. Exempli gratia supposito quod numerus diuidendus sit 3 4 6 2 1 primum membrum erit 34: si diuisor sit 34, vel 30, vel 18, vel 4, vel quiuis alius numerus maior quidem numero 3, sed non maior numero 34; sic enim semper verum erit quod numerus 34, vel sit æqualis, vel proxime maior diuisore: adeoque primum membrum constituat; quod verum non esset, si diuisor esset 3: quia huic diuisori æquatur prima nota numeri diuidendi, idem etiam verum non esset, si diuisor esset 35, vel alius maior numerus: quia hoc casu numerus 34 non esset æqualis, aut proximè maior diuisore. Si in proposito exemplo diuisor esset 35, primum membrum esset 346: idemque verum esset, supposito quod pro diuisore daretur quiuis numerus maior quā 34, sed minor quam 346. Denique primum membrum esset 3, si pro diuisore daretur numerus 3, vel 2, vel 1.

Reflexio secunda. Vt habeatur numeri diuidendi membrum aliquod, diuersum à primo membro: residuo simplicis diuisionis, institutæ circa membrum proximè præcedens, successiuè adscribatur vna illa nota numeri diuidendi, quæ proximè sequitur præcedentis membris vltimam notam sumptam ex numero diuidendo:

do:

do: etenim cuiuſuis mẽbri vltima nota ſemper ſumitur ex numero diuidendo. Exempli gratia numerus diuidendus ſit 6 4 7 7 diuiſor ſit 4: quare iuxta primam reflexionem primum membrum erit 6: iam verò ſi circa primum membrum inſtitutæ diuiſionis reſiduum ſit 2, ſecundum membrum erit 24: quod habetur, reſiduo 2, ſucceſſiue adſcribendo notam 4, quæ in numero diuidendo proximè ſequitur notam 6, quæ primi membri vltima eſt. Rurſus, ſi circa ſecundum membrum 24, inſtitutæ ſimplicis diuiſionis reſiduum ſit nihil, ſiue 0: tertium membrum erit 7, quod habetur reſiduo, ſiue 0, ſucceſſiue adſcribendo notam 7, quæ in numero diuidendo proximè ſequitur notam 4. quæ in ſecundo membro eſt vltima; eſtque planè idem ſiue ſcribatur 0 7, ſiue ſcribatur 7. Rurſus, ſi circa tertium membrum inſtitutæ ſimplicis diuiſionis reſiduum ſit 3, quartum membrum erit 37: quod habetur, reſiduo 3, ſucceſſiue adſcribendo notam 7, quæ in numero diuidendo proximè ſequitur aliam notam 7, quæ in tertio membro vltima eſt.

Praxis ſeptima, ſiue diuiſio compoſita atque compendiata numerorum integrorum vulgarium.

QVælibet compoſita atque compendiata diuiſio numerorum integrorum vulgarium, abſoluitur, alternis inueniendo, & diuiſionis membrum, vt docetur in duabus reflexionibus præcedẽtibus & circa inuentum membrum inſtituendo ſimplicem diuiſionem; etenim membri inuentio neceſſaria eſt vt ſimplex diuiſio inſtitui poſſit & ex ſingulis ſimplicibus diuiſionibus, ſingulæ notæ Arithmeticæ producuntur, quæ ſucceſſiuè ſcriptæ, cum appoſito vltimæ ſimplicis diuiſionis reſiduo (ſcripto vt docetur in prima praxi) exhibent productum compoſitæ diuiſionis.

Praxim paucis expoſitã, declaro varijs exẽplis; inter quæ ſatis notabilis diuerſitas inuenitur: ſed non aliunde cauſata, quam ex modo diuerſo, quo inſtitui poſſunt diuiſiones ſimplices atque compendiatæ, quæ neceſſariæ ſunt pro compendiata atque compoſita diuiſione.

Primũ exemplũ ſeptimæ praxis, in quo mediante columna diuiſoria inuenitur productum ex numero 6897, diuiſo per numerum 39. Primo ex diuiſore 39 cõſtruo columnã diuiſoriam, vt docetur in praxi quinta, quam columnam diuiſoriam hic repreſentatam habes: vel certè columnam illam exhibeo in laminis Arithmeticis. Deinde ita practicè diſcurro. Primum membrum eſt 68: hoc mem-

membro proximè minor columnæ numerus eſt 39, cui in indice reſpondet 1: igitur in quotiente ſcribo 1, ipſi vero membro 68, ſubſcribo inuentum columnæ numerum 39, qui ſubtractus ex numero 68, relinquit 29: cui ſucceſſiue adſcribo notam 9, numeri diuidendi, atque ita habeo nouum membrum 299: hoc membro proxime minor columnæ numerus eſt 273, cui in indice reſpondet 7, igitur 7 ſcribo in quotiente, & inuentum columnæ numerum 273, ſubſcribo adhibito membro 299: facta ſubtractione remanet numerus 26, cui ſucceſſiue adſcribo notam 7 numeri diuidendi, atque ita habeo nouum membrum 267; hoc membro proximè minor columnæ numerus eſt 234, cui in indice reſpondet nota 6, quam ſcribo in quotiente: & inuentum columnæ numerum 234 ſubſcribo adhibito membro 267; facta ſubtractione remanet 33 cui ſucceſſiue adſcribere non poſſum aliam notam numeri diuidendi adeoque diuiſio eſt abſoluta, & notæ productæ ex diuiſione erunt 176: vltimæ ſimplicis diuiſionis, atque adeo totius compoſitæ diuiſionis, reſiduum erit 33: quare productum ex propoſita diuiſione erit $176\frac{33}{39}$: eritque verum, quod 6897 diuiſum per 39 producat $176\frac{33}{39}$.

1.	29	6897 ($176\frac{33}{39}$
2.	74	39
3.	117	———
4.	156	299
5.	195	273
		———
6.	234	267
7.	273	234
8.	312	———
9.	351	33

Secundum exemplum ſeptimæ praxis, in quo mediante columna diuiſoria productum inuenitur, paulo magis compendiata ſcriptione.

Numerus diuidendus ſit 6897 diuiſor ſit 39: quibus poſitis, primo conſtruo columnam diuiſoriam, vt in præcedenti exemplo. Deinde ita diſcurrendo operor: primum membrum eſt 68, hoc membro proxime minor columnæ numerus ex 39, cui indicis nota 1 reſpondet: itaque in quotiente ſcribo 1, & inuentum columnæ numerum 39 ſubtrahendo ex propoſito membro 68, habeo reſiduum 29: quod ſubſcribo membro propoſito: ſcriptum reſiduum 29 cum nota 9 numeri diuidendi conſtituit nouum membrum 299, quo mẽbro proxime minor columnæ numerus eſt 273, cui reſpondet indicis.

eis nota 7. itaque in quotiente scribo 7, & inuentum numerum 273, subtrahendo ex proposito membro 299, habeo residuum 26, quod subscribo membro adhibito; residuum 26, cum nota 7 numeri diuidendi, constituit nouum membrum 267; quo membro proximè minor columnæ numerus est 234, cui respondet indicis nota 6: itaque in quotiente scribo 6, & inuentum columnæ numerum 234 subtrahendo ex proposito membro 267, habeo residum 33, quod subscribo adhibito membro; & quia nulla superest nota, cum qua residuum nouum membrum constituere possit, absoluta est operatio, & productum erit $176\frac{33}{39}$.

1.	39	6897	($176\frac{33}{39}$
2.	78	29	
3.	117	26	
4.	156	33	
5.	195		
6.	234		
7.	273		
8.	312		
9.	351		

Diuisio quæ mediante columna diuisoria absoluitur esset præferenda alijs omnibus mihi cognitis, nisi annexam haberet molestiam quam secum affert columnæ constructio: quæ tamen molestia magna non est, & aliqua ex parte euitari non potest: quandoquidem aliquæ ex multiplicationibus vtilibus pro columnæ constructione, necessario recurrant in ea diuisione; in qua non adhibetur columna: immo fieri potest, vt multiplicationum pro diuisione requisitarum multitudo, maior sit in ea praxi quæ columnam non adhibet, quam in altera in qua adhibetur columna; etenim quando columna adhibetur, non nisi octo multiplicationes vtiles esse possunt, pro quibus etiam totidem additiones sufficiunt, quæ multiplicationibus longè faciliores sunt: verum quando non adhibetur columna, tot requiruntur multiplicationes, quot notæ scribendæ sunt in quotiente, quæ possunt esse longe plures quam octo; his adde quod columna diuisoria expeditè exhibeatur in laminis Arithmeticis: quodque columnam adhibendo, cesset omnis difficultas, inueniendi quoties diuisor contineatur in membro proposito: quæ difficultas; præ cæteris omnibus molestam reddit diuisionem, in qua columna non adhibetur: & subinde operantem non parum defatigat, vel etiam inducit in errorem, nisi maximè versatus sit in Arithmeticis operationibus. Verum nihil melius, quam ipsa praxis, docet, vtrum, vel quando, ex diuersis diuisionis praxibus, vna alteri præ-

ferenda sit; & quia pro diuersis casibus, atque diuersis personis, diuersæ praxes magis prosunt, addo hic alteram, quæ à priori non differt, nisi quod non adhibeat columnam diuisoriam.

Tertium exemplum septimæ praxis, in quo adhibetur diuisio simplex proposita in sexta praxi.

Numerus diuidendus sit 6897, diuisor sit 39; vt hanc diuisionem absoluam, ita practicè discurro. Primum membrum est 68, in quo diuisor 39 tantum semel continetur, quare in quotiente scribo 1: & quia 1 ductum in diuisorem 39 dat 39: numerum 39 subscribo membro 68: facta subtractione relinquitur numerus 29, cui successiue adscribo notam 9 numeri diuidendi, atque ita habeo nouum membrum 299: in hoc membro diuisor 39 septies continetur; quare notam 7 scribo in quotiente & quia 7 ductum in diuisorem 39 dat 273, hunc numerum subscribo membro 299: facta subtractione relinquitur numerus 26, cui successiuè adscribo notam 7 numeri diuidendi, atque ita habeo nouum membrum 267: in hoc membro diuisor 39 continetur sexies, quare notam 6 scribo in quotiente: & quia 6 ductum in diuisorem 39 dat 234, hunc numerum subscribo membro 267: facta subtractione relinquitur numerus 33, cui successiuè adscribere non possum aliam notam numeri diuidendi, quia omnes eius notæ adhibitæ sunt, atque adeo absoluta est diuisio: atque ex diuisione productæ notæ Arithmeticæ erunt 176: diuisionis residuum erit 33: adeoque propositæ diuisionis productum erit $176\frac{33}{39}$.

6897		($176\frac{33}{39}$
39		39
299		
273		
	267	
	234	
	33	

Quartum exemplum septimæ praxis, quod à tertio non differt, nisi penes scriptionem paulò magis compendiatam.

Numerus diuidendus sit iterum 6897 & diuisore sit 39; his positis, primum membrum est 68, in quo diuisor semel continetur: itaque in quotiente scribo 1: & quia 1 ductum in diuisorem 39 dat 39, atque insuper 39 sublatum ex membro 68 relinquit 29, hunc numerum 29 subscribo membro proposito; eritque nouum membrum 299, in quo diuisor 39, continetur septies: quare in quotiente scribo 7, & quia 7 ductum in diuisorem 39 dat 273, atque hic numerus sublatus ex proposito membro 299 relinquit 26: hunc nu-

F merum

merum 26 ſubſcribo membro adhibito, & nouum membrum erit 267 in quo diuiſor 39 continetur ſexies, quare in quotiente ſcribo notam 6: & quia 6 ductum in diuiſorem 39 dat 234, atque hic numerus ſubtractus ex membro propoſito 267, relinquit 33; hunc numerum 33 ſubſcribo membro adhibito: quo facto nouum membrum haberi vlterius non poteſt adeoque diuiſio eſt abſoluta, atque ex diuiſione productæ notæ Arithmeticæ erunt 176, & diuiſionis reſiduum erit 33: quare productum ex propoſita diuiſione erit $176\frac{33}{39}$.

6 8 9 7	($176\frac{33}{39}$
2 9	39
2 6	
3 3	

Hactenus dictis de diuiſione, vtile exiſtimaui addere paucas reflexiones quæ ſubſequuntur.

Reflexio prima. Si aliquot poſtremæ notæ alicuius propoſiti diuiſoris, ſint cifræ, ſiue 0; negligi poterunt: dummodo etiam negligantur totidem poſtremę notæ numeri qui diuidendus proponitur, ſed tamen non negligantur in reſiduo diuiſionis. Exempli gratia numerus 632 diuidendus ſit per numerum 200, vtrobique negligendo duas poſtremas notas, reliquum ſuperiorem numerum 6 diuidendo per reliquum inferiorem numerum 2, nota producta ex diuiſione erit 3, reſiduum verò erit 32, atque productum ex diuiſione erit $2\frac{32}{200}$.

Reflexio ſecunda. Apud non paucos expoſitores Arthmeticæ practicæ, magis vſitata inuenitur aliqua diuiſionis praxis, in qua membri adhibiti notæ delentur: quam praxes hactenus à nobis propoſitę; prædictam tamen praxim putaui planè negligendam: quia ſi fortè inter operandum irrepat error aliquis, qui deprehendatur, vel ex eo quod productum ex multiplicatione maius ſit membro propoſito, vel quod reſiduum ſubtractionis maius ſit diuiſore: difficile eſt poſt deletas notas, errorem corrigere: quod in propoſitis à nobis praxibus difficultatem non habet.

Reflexio tertia. Quemadmodum multiplicatio maximè differt ab additione, vt monuimus in reflexione tertia capitis præcedentis: ita etiam diuiſio maximè differt à ſubtractione, tametſi per iteratas ſubtractiones inueniri poſſit productum diuiſionis. Impoſſibile eſt, vt productum ex ſubtractione numerorum vulgarium, non ſit minus ſuperiori genitore ſubtractionis: cuius partem exhibet productum ſubtractionis. Productum diuiſionis non ſemper eſt minus numero qui diuiditur: ſed ſubinde eſt minus, ſubinde æquale, ſubinde maius. Exempli gratia. 6 diuiſum per 2 producit 3; quo caſu productum ex diuiſione eſt minus numero qui diuiditur, 2 diuiſum per

per 1 producit 2, quo caſu productum eſt æquale numero qui diuiditur. Præterea ex dicendis de diuiſione numerorum fractorum vulgarium, conſtabit, quod 2 diuiſum per $\frac{1}{4}$ producat 8; quo caſu productum eſt maius numero qui diuiditur. Hinc facilè colligitur, numerum A diuidere per numerum B, non eſſe idem, ac inuenire aliquam partem numeri A: etenim quælibet pars numeri A, neceſſariò eſt minor numero A; quare ſi numerum A diuidere per numerum B, eſſet idem ac inuenire aliquam partem numeri A: etiam productum ex diuiſione deberet eſſe minus numero qui diuiditur.

Appendix.

De operationum Arithmeticarum examine.

Operationum Arithmeticarum, atque hactenus propoſitarum: varia examina proponunt ſcriptores Arithmeticæ practicæ; illa tamen omnia quæ ab ipſis operationibus diuerſa ſunt, negligo, vt parum vtilia, atque errori obnoxia.

Legitimum additionis examen habetur ex ſubtractione: & viciſſim ex additione legitime infertur an in ſubtractione erratum ſit: etenim qualeſcunq; ſint numeri A & B, ſi numerus A, additus numero B, producat numerum C: etiam numerus B ſubtractus ex numero C; produci numerũ A, & etiã numerus A, ſubtractus ex numero C, producit numerum B. Exempli gratia, quia numerus 12 additus numero 14, producit numerum 26: etiam numerus 12 ſubtractus ex numero 26, producit numerum 14: & numerus 14, ſubtractus ex numero 26, producit numerum 12. Præterea qualeſcunque ſint numeri B & C, eo ipſo quod numerus B, ſubtractus ex numero C, producat numerum A; etiam numerus A, additus numero B, producit numerum C. Exempli gratia, quia numerus 12, ſublatus ex numero 26, producit numerum 14; etiam numerus 14, additus numero 12, producit numerum 26.

Pari modo legitimum multiplicationis examen, habetur à diuiſione, & viciſſim diuiſionis examen, ſubminiſtrat multiplicatio. Etenim qualeſcunque ſint numeri A & B, ſi numerus A ductus in numerum B, producit numerum C, etiam numerus C, diuiſus per numerum B, producit numerum A; & inſuper numerus C, diuiſus per numerum A, producit numerum B. Exempli gratia, quia numerus 7, ductus in numerum 4, producit numerum 28; etiam numerus 28, diuiſus per numerum 4, producit numerum 7; & in-

& insuper numerus 28, diuisus per numerum 7, producit numerum 4. Rursus qualescunque sint numeri B & C, eo ipso quod numerus C, diuisus per numerum B, producit numerum A: etiam numerus A ductus in numerum B, producit numerum C. Exempli gratia, quia numerus 28 diuisus per numerum 4, producit numerum 7: etiam numerus 7 ductus in numerum 4, producit numerum 28.

Dubium esse posset circa examen diuisionis, quando productum constat ex numero integro, & fracto, vt accidere potest in diuisione integrorum numerorum. Exempli gratia productum ex numero 25, diuiso per numerum 7, producit $3\frac{4}{7}$, qui est numerus compositus ex integro, & fracto, & hactenus non egimus nisi de multiplicatione integrorum numerorum. Vt hoc vel simili casu diuisio examinari possit mediante multiplicatione, notare sufficit, quod si integer numerus productus ex diuisione, ducatur in diuisorem, atque huic producto addatur numerus scriptus supra lineolam, habebitur numerus circa quem est instituta diuisio. Exempli gratia, quia numerus 25; diuisus per numerum 7 producit numerum $3\frac{4}{7}$: etiam numerus 3 ductus in numerum 7, auctus numero 4, producit numerum 25: nam numerus 3, ductus in numerum 7, dat numerum 21: cui addendo numerum 4, scriptum supra lineolam, habetur numerus 25.

CAPVT VI.

Proponuntur aliqua, pro operationibus Arithmeticis instituendis circa numeros vulgares fractos.

EXpositis operationibus Arithmeticis, quæ instituuntur circa integros numeros vulgares: venio ad alteram partem Arithmeticæ vulgaris, quæ docet easdem operationes instituere circa numeros, qui dicuntur fracti; in quem finem, imprimis nobis exponendum est, quomodo à prioribus discrepent posteriores. Numerus dicitur qui numerat, siue indicat vnitates, vnam scilicet, vel plures: etenim à nobis non minus appellatur numerus, quod vnicam vnitatem indicat; quam quod indicat plures vnitates. Præterea vox vnitas, ita intelligenda est, vt significet idem, quod significat vox vnum, siue indiuiduum. Iam verò vnitas considerari potest vt genus est, siue illud præcisè quod dicitur vnum, hoc est indiui-

diuiduum consideratum præcisè vt indiuiduum est: atque hæc vnitas, appellatur vnitas generica, siue indiuiduum genericum. Vnitas generica restricta, dicitur vnitas specifica: etenim vnitas generica non subdiuiditur in diuersa vnitatum genera, sed tantum diuiditur in diuersas species vnitatum: atque generica vnitas, est aliquid idem in singulis vnitatibus specificis; sicut animal, est aliquid idem, in singulis animalium speciebus; hinc vnitas generica est eadem in binario, ternario, quaternario, vnitate totali, vnitate partiali, licet singulæ illæ vnitates specie differant inter se; singulæ enim sunt vnitates genericæ diuersimodè restrictæ: ipsa verò vnitas generica restricta, dicitur vnitas specifica: atque vnitas generica pluries eodem modo restricta constituit plures eiusdem speciei vnitates: ipsa vnitas generica pluries, sed diuersimodè restricta, constituit plures diuersæ speciei vnitates. Exempli gratia, vnitas hominum, siue vnus homo: est vnitas specie diuersa, ab vnitate Leonis, siue ab vno Leone; ex quo fit, quod vnus homo plus vno Leone, neque faciat duos homines, neque duos Leones. Similiter, vnitas hominum alborum, siue vnus homo albus: specie differt ab vnitate hominum nigrorum, siue ab vno homine nigro; ex quo fit, quod vnus homo albus plus vno homine nigro, neque faciat duos homines albos, neque duos homines nigros. Rursus, vnitas diuisa per quatuor, specie differt ab vnitate diuisa per tria; ex quo fit, quod vnitas diuisa per quatuor plus vnitate diuisa per tria, neque constituat duas vnitates diuisas per quatuor, neque duas vnitates diuisas per tria. Denique vniuersaliter vnitas generica diuersimodè restricta, atque contracta ad vnitates plus quam numero inter se differentes, constituit vnitates specificas diuersæ speciei. Ex quo satis patet, quid sint vnitates eiusdem, vel diuersæ speciei; quodque duæ vnitates erunt eiusdem speciei, si non differant quo ad restrictionem, sed solo numero ab inuicem discrepent; & quod duæ vnitates erunt diuersæ speciei, si differant quo ad restrictionem, atque magis quam numero ab inuicem discrepent. Differentiæ restringentes vnitatem genericam, atque illam contrahentes ad specificas vnitates vulgares: vel sunt restrictiones dependentes à diuisione, vel non dependentes à diuisione. Priores, compendiata scriptione indicat vulgaris Arithmetica, in qua, posteriores, vel productiori scriptione indicantur, vel habentur ex hypothesi: à qua, exempli gratia, dependet quod vnitas simplex, vnius, vel alterius speciei vnitates repræsentet: neque aliunde quam ex hypothesi potest cognosci, cuius speciei vnitatem significet vnitas simplex; hæc enim quantum est ex se, planè indifferens est, ad significandam cuiuslibet speciei vnitatem. Restrictio depen-

dependens à diuisione, compendiate indicatur per genitores talis diuisionis; sic quando dicitur vnitas diuisa per quatuor; exprimitur numerus habens restrictionem dependentem à diuisione, in qua superior genitor est vnum, inferior genitor est quatuor. Similiter quando dicitur, vnitas diuisa per tria; exprimitur numerus habens restrictionem dependentem à diuisione, in qua superior genitor est vnum, inferior genitor est tria. Pari modo quando dicitur, quatuor diuisum per duodecim: exprimitur numerus habens restrictionem dependentem à diuisione, cuius superior genitor est quatuor, inferior genitor est duodecim. Iam verò vulgaris numerus fractus dici potest numerus vulgaris habens restrictionem dependentem à diuisione. Vulgaris fracti numeri numerator, dicitur, superior genitor illius diuisionis à qua numerus fractus restrictionem habet. Vulgaris fracti numeri denominator, appellatur, inferior genitor illius diuisionis à qua numerus fractus restrictionem habet. Ex his constat quid sint vulgares fracti numeri, & quid intelligatur per numeratorem, aut denominatorem vulgaris fracti numeri. Vt vulgaris Arithmetica fractum numerum repræsentet compendiata scriptione: interposita lineola numeratori subscribit denominatorem. Exempli gratia, numeri A, B, C, D, singuli compendiata scriptione exhibent fractum numerum vulgarem; numerus A legitur vna quarta pars: vel vnum diuisum per quatuor: vel vna quaternarij vnitas; tribus istis diuersis modis legendi fractum numerum, nihil diuersum, sed idem planè significatur; primus magis vsitatus est in vulgari Arithmetica; secundus vsitatior est in nostra logistica; quodque primus à secundo non differat quo ad significationem, etiam apud eos, qui tradunt vulgarem Arithmeticam: satis patet, ex prima diuisionis praxi proposita cap. 5. quæ apud vulgaris Arithmeticæ expositores maximè vsitata est, & subsistere non posset, si duo priores modi legendi fractum numerum non significarent idem. De tertio modo legendi fractum vulgarem numerum paulo post recurrent aliqua. Numerus B, legitur, vna tertia pars: vel vnum diuisum per tria: vel vna ternarij vnitas. Numerus C, legitur, quatuor duodecimæ partes: vel quatuor diuisum per duodecim: vel quatuor duodenarij vnitates. Numerus E, legitur, quatuor primæ partes: vel quatuor diuisum per vnum; vel quatuor integræ vnitates. Ex his satis patet quomodo legi possint quiuis alij numeri vulgares fracti. Circa modum legendi numerum fractum E, aduertendum est, quod pars prima vnitatis ita debeat intelligi, vt idem significet, ac integra vnitas:

A $\frac{1}{4}$

B $\frac{1}{3}$

C $\frac{4}{12}$

E $\frac{4}{1}$

F 4

ex quo

ex quo fit, quòd quatuor partes primæ vnitatis, non sint aliquid diuersum, à quatuor integris vnitatibus: & similiter, quatuor diuisum per vnum, non differat ab integro numero quatuor: ex quo vlteriùs sequitur, nullum numerum habentem pro denominatore vnitatem vulgarem, significare aliquid diuersum, ab eo, quod significatur per solum numeratorem; adeo vt numeri E, & F, diuersa scriptione idem significent: idemque planè significetur, dicendo quatuor primæ partes, vel quatuor diuisum per vnum, vel quatuor integræ vnitates, vel quatuor; immo hinc fit, quod integri numeri vulgares omnes censeantur pro denominatore habere vnitatem vulgarem; quem tamen denominatorem, vel exprimere, vel negligere, liberum est: quandoquidem per hoc non varietur numeri significatio: & nisi in hac parte mecum conuenirent scriptores vulgaris Arithmeticæ, statuere non possent, inter se specie conuenire numeros vulgares, qui conueniunt quo ad denominatorem: illos verò specie differre, qui differunt quo ad denominatorem; etenim numeros E, & F, hoc est quatuor primæ partes, & quatuor, etiam iuxta ipsos, sunt numeri eiusdem speciei: & tamen non conuenirent quo ad denominatorem, si integer numerus F, siue quatuor, non intelligatur pro denominatore habere vnitatem simplicem, quæ est denominator numeri E. Si quæras, quare in vulgaribus numeris numeratorum inæqualitas non causet diuersitatem specificam, & tamen denominatorum inæqualitas causet diuersitatem specificam, inter duos vulgares numeros: atque exempli gratia vnum diuisum per quatuor, & vnum diuisum per tria, sint numeri diuersæ speciei: & tamen vnum diuisum per quatuor; & tria diuisum per quatuor, sint numeri eiusdem speciei: licet priores duo quo ad denominatores non magis differant, quam posteriores differant quo ad numeratores. Respondeo vnum diuisum per quatuor, significare vnam quaternarii vnitatem, vel vnam quartam partem: & vnum diuisum per tria, significare vnam ternarij vnitatem, siue vnam tertiam partem: quandoquidem igitur quaternarij, & ternarii vnitates, sint vnitates diuersimodè restrictæ, atque inter se plus quam numero differentes: ex ijs quæ paulò ante dicta sunt de numeris specie differentibus, manifestum est, prædictos duos numeros inter se specie differre. Verum vnum diuisum per quatuor, significat vnam quaternarij vnitatem, vel vnam quartam partem: atque tria diuisum per quatuor significat tres quaternarij vnitates, siue tres quartas partes: ex quo patet duos istos numeros significare vnitates eodem modo restrictas, atque inter se solo numero diuersas: & consequenter duos istos numeros non differre specie. Ex hac responsione videtur satis mani-

manifestum, quare in numeris vulgaribus sola inæqualitas numeratorum non causet diuersitatem specificam, & tamen sola inæqualitas denominatorum causet diuersitatem specificam; dixi sola inæqualitas numeratorum: etenim, si duorum vulgarium numerorum numeratores, non tantum inæquales sint, sed amplius inter se differant: etiam numeri specie differrēt, licet habeant eosdem denominatores. Exempli gratia vnitas ternarij diuisa per quatuor, specie differt, ab vnitate binarij diuisa per quatuor: vt satis patet ex paulò ante dictis de numeris specie differentibus: & tamen duo isti numeri eumdem denominatorem habent. Idem verum erit de vna libra diuisa per quatuor vncias, & de vna vncia diuisa per quatuor vncias; quis tamen negare potest, eiusmodi numeros vulgares esse, vel à vulgari Arithmetica considerari. Hinc colliges, quod quando vulgaris Arithmeticæ expositores statuunt, specie conuenire numeros vulgares, qui conueniunt quo ad denominatorem: atque specie differrē numeros vulgares, qui differunt quo ad denominatorem: id intelligendum esse; de numeris vulgaribus expressis compendiata scriptione apud ipsos vsitata, atque insuper adhibita in eadem hypothesi: siue de numeris compendiate repræsentatis per solas vulgares vnitates simplices, atque supposito quod vnitas simplex semper idem significet. Denique vt intelligatur, singulos modos legendi fractos numeros paulò ante propositos idem significare, sufficit intelligere numeros, repræsentatos productiori scriptione, quorum numerorum notitia, supponitur ab ijs qui vulgarem practicam Arithmeticam tradunt, & vix, aut ne vix quidem declaratur, ab illis, qui tradunt Arithmeticæ vulgaris practicæ, speculatiua fundamenta; qua de re plura inuenies in postrema parte huius opusculi.

Numerus fractus, & fractio, idem significant: fractionis termini dicuntur, numerator, & denominator fractionis; hinc fractio, siue fractus numerus, minoribus terminis constare dicitur, quo fractio habet minorem numeratorem, & denominatorem,

Duæ fractiones dicuntur æquales inter se, quæ æquales numeros significant. Exempli Gratia fractiones A & B, sunt fractiones æquales: quia significant numeros æquales: vt satis patet ex ijs, quæ paulò ante diximus de significatione fractionum.

A $\frac{4}{8}$

B $\frac{1}{2}$

Numerus vulgaris erit simplex, si vnicum habeat denominatorem; erit compositus, si duos, aut plures denominatores habeat. Exempli gratia numeri 4, item 120, item $\frac{4}{8}$, item $\frac{10}{2}$, singuli simplices sunt; verum numerus $12\frac{3}{4}$ est compositus.

Duo numeri vulgares erunt eiusdem speciei, si non differant quo ad denominatorem, & insuper, ex vi hypothesis, vnitates simplices à numeris indicatæ, non differant. Duo numeri vulgares erunt diuersæ speciei: si differant quo ad denominatorem, vel vnitates simplices à numeris indicatæ, ex vi hypothesis, differant inter se.

Mensura numeri A, dicitur quilibet numerus integer B, qui semel, vel sæpius sumptus; potest æquari numero A. Exempli gratia numeri 24, mensura est numerus 6: quia numerus 6 quater sumptus, æquatur numero 24: similiter numeri 24, mensura est 8: quia numerus 8 ter sumptus æquatur numero 24. Pari modo numeri 24. mēsuræ sunt numeri 12, 8, 6, 3, 1, 24; etenim numero 24. æquatur numerus 12 bis sumptus itē numerus 6, quater sumptus, item numerus 3, octies sumptus; item numerus 1 vigesies quater sumptus; item numerus 24, semel sumptus. Verum numeri 24. mensura non est numerus 5: quia quinquies sumptus est maior quam 24: minus quam quinquies sumptus est minor quam 24. Similiter numeri 24, mensura non est numerus 7: qui quater sumptus est maior quam numerus 24; minus quam quater sumptus est minor quam numerus 24.

Mensura duobus numeris A & C communis, est quiuis numerus, qui tam numeri A quam numeri C mensura est. Exempli, gratia numerorum 24 & 20, communis mensura est numerus 4: quia sexies sumptus æquatur numero 24: & etiam quinquies sumptus æquatur numero 20.

Duorum numerorum maxima communis mensura, dicitur, numerus, quo non datur maior, qui sit communis mensura, Exempli gratia numerorum 24, & 16, maxima communis mensura est numerus 8: quia numerus 8 est mensura communis numerorum 24, & 16: & non datur numerus maior, qui sit communis mensura: licet dentur alij numeri minores, qui singuli sint communis mensura numerorum 24 & 16: tales enim sunt 4, 2, 1. Similiter numerorum 24 & 19, maxima communis mensura est numerus 1: etenim numerus 1, est mensura communis numerorum 24 & 19: et non datur alius: numerus maior qui sit communis mensura vtriusque illius numeri.

Problemata vtilia pro operationibus Arithmeticis, quæ instituuntur circa fractos numeros vulgares.

Singula problemata quæ hic proponuntur, vsitata sunt apud expositores vulgaris Arithmeticæ practicæ: licet enim singula non sint planè necessaria pro operationibus instituendis circa fractos numeros

G

meros vulgares: tamen maxime vtilia sunt, pro vulgari Arithmetica practica.

Problema I.

Inuenire maximam communem mensuram, propositorum duorum numerorum A & B, qui singuli sint numeri vulgaris integri.

MAiorem numerum A, diuidendo per minorem B, inueniatur huius diuisionis residuum C. Rursus præcedentis diuisionis diuisorem B, diuidendo per residuum C inueniatur nouum residuum D. Rursus præcedentis diuisionis: diuisorem C, diuidendo per residuum D, inueniatur nouum residuum E; atque hoc ordine continuentur diuisiones, donec pro residuo inueniatur o, siue nihil; vltimæ huius diuisionis diuisor erit maxima communis mensura quæsita. Exempli gratia, propositi sint numeri 20 & 12, quorum maxima communis mensura inuenienda sit. Primo, 20 diuidendo per 12, habetur residuum 8. Rursus 12 diuidendo per 8; habetur residuum 4. Rursus, 8 diuidendo per 4, habetur residuum o; itaque numerorum 20 & 12, maxima communis mensura est 4. Similiter propositi sint numeri 32 & 16, quorum maxima communis mensura inuenienda sit; 32 diuidendo per 16, habetur pro residuo o; itaque numerorum 32 & 16, maxima communis mensura est 16.

Problema II.

Propositum fractum numerum vulgarem reducere ad minimos terminos.

PRimo per primũ problema, inueniatur maxima cõmunis mẽsura conueniens numeratori, & denominatori propositæ fractionis. Deinde propositę fractionis numerator, diuisus per inuentã maximã mensurã communem, producet nouum numeratorem, & etiam propositæ fractionis denominator, diuisus per inuentã maximam mensurã communem, producet nouum denominatorem. Deniq; nouus numerator, cum nouo denominatore, constituet fractionem quæsitam. Exempli gratia, proposita fractio sit $\frac{12}{20}$, numeratori 12, & denominatori 20 conueniens maxima communis mensura, est 4: deinde 12 diuisum per 4 producit nouum numeratorem 3; & 20 diuisum per 4 producit nouum denominatorem 5: adeoque inuenta fractio erit $\frac{3}{5}$: quæ fractio æquiualet propositæ fractioni $\frac{12}{20}$: neque possibilis est vlla fractio quæ æquiualeat propositæ fractioni, & constet minoribus terminis quam inuenta fractio.

Problema III.

Propositos duos fractos numeros vulgares reducere ad communem denominatorem.

PRimo, numerator primæ fractionis propositæ, ductus in denominatorem secundæ fractionis propositæ, dabit primum numeratorem nouum; deinde, secundæ fractionis propositæ numerator, ductus in denominatorem primæ fractionis propositæ, dabit secundum numeratorem nouum. Tertio primæ fractionis propositæ denominator, ductus in denominatorem secundæ fractionis propositæ, dabit nouum denominatorem communem. Denique primus numerator nouus, cum inuento communi denominatore, constituet nouam fractionem, æquiualentem primæ fractioni propositæ; & secundus numerator nouus, cum inuento communi denominatore, constituet nouam fractionem æquiualentem secundæ fractioni propositæ: atque adeo habebuntur duæ nouæ fractiones, habentes communem denominatorem, atque æquiualentes propositis duabus fractionibus. Exempli gratia proposita prima fractio sit $\frac{2}{3}$, secunda fractio proposita sit $\frac{4}{5}$. Quoniam 2 ductum in 5, dat 10: primus numerator nouus erit 10. Et quia 4 ductum in 3, dat 12: secundus numerator nouus erit 12. Præterea cum 3 ductum in 5, det 15; communis denominator erit 15. Denique prima noua fractio erit $\frac{10}{15}$; secunda noua fractio erit $\frac{12}{15}$; atque nouæ duæ fractiones exhibebunt propositas duas fractiones, reductas ad communem denominatorem.

Problema IV.

Propositum fractum numerum vulgarem, reducere ad alium fractum numerum, habentem datum denominatorem, in casu in quo id fieri potest.

PRopositæ fractionis numerator, ductus in datum denominatorem, producet aliquem numerum, qui diuisus per denominatorem propositæ fractionis, dabit nouum numeratorem: nouus numerator cum dato denominatore, constituet quæsitam fractionem. Exempli gratia, proposita fractio sit $\frac{4}{6}$: datus denominator sit 3. Quoniam, 4 ductum in 3, dat 12: & insuper 12 diuisum per 6; dat 2: nouus numerator erit 2: & noua fractio erit $\frac{2}{3}$; quæ habet datum denominatorem 3, & etiam æquiualet propositæ fractioni.

Si fieri non possit quod præscribitur pro solutione problematis, casus propositus censetur impossibilis. Exempli Gratia, proposita fractio sit $\frac{4}{6}$: datus denominator sit 5; hoc casu, 4 ductum in 5 dat 20: sed 20 diuisum per 6, non dat integrum numerum: adeoque fieri non potest quod præscribitur in solutione problematis, quare casus propositus censetur impossibilis, & proposita fractio $\frac{4}{6}$, non potest reduci ad aliam fractionem, quæ habeat denominatorem 5.

CAPVT VII.

De operationibus Arithmeticis, quæ instituuntur circa fractos numeros vulgares.

SVpposita intelligentia eorum quæ præcedenti capite dicta sunt de numeris vulgaribus fractis: & notitia operationum Arithmeticarum, quæ instituuntur circa integros vulgares numeros; breuiter propono, quomodo Arithmeticæ operationes absoluantur, quando ex datis pro operatione numeris, aliquis fractus sit, atque vulgaris; operationum singularum definitiones non repeto, quandoquidem illæ à nobis propositæ sint in præcedentibus capitibus. Præterea vnico capite complector operationes omnes, quæ circa vulgares fractos numeros instituuntur: faciles enim sunt, neque in ipsis superest specialis difficultas, præsupposita notitia eorum quæ hactenus tradidimus. Obseruandum hic est, quod nusquam expresse agamus de operationibus vulgaris Arithmeticæ, in casu, in quo aliquis ex datis numeris est compositus, ex integro & fracto, aut diuersis fractis numeris: quandoquidem tali casu, compositus numerus prius reduci possit ad alium æquiualentem non compositum: atque ad hoc abunde sufficiant pauca superioris capitis problemata.

De Additione numerorum fractorum vulgarium.

VT inueniatur productum, quod oritur ex Additione duorum, aut plurium numerorum vulgarium, quorum aliquis sit fractus numerus. Primo si singuli numeri dati non habeant communem denominatorem, per problema 3. capitis 6. reducantur ad alios numeros, habentes communem denominatorem. Quo facto, numeratores simul additi dabunt nouum numeratorem qui cum communi denominatore, constituet fractum numerum productum ex proposita additione.

Exempli Gratia, si fractus numerus $\frac{4}{7}$, addendus sit alteri fracto numero $\frac{3}{5}$: hi numeri, per problema 3. capitis 6. reducti ad alios, habentes communem denominatorem, erunt $\frac{20}{35}$ & $\frac{21}{35}$: numeratores 20 atque 21 simul additi, producunt 41: quare numerus productus, ex proposita additione erit $\frac{41}{35}$: adeoque verum erit quod $\frac{4}{7}$ plus $\frac{3}{5}$ producant $\frac{41}{35}$; Similiter si integer numerus 4, addendus sit fracto numero $\frac{3}{5}$: hi numeri per problema 3 capitis 6 reducti ad alios, habentes communem denominatorē erūt, $\frac{20}{5}$ & $\frac{3}{5}$: numeratores 20 & 3 simul additi, producunt 23: quare numerus productus ex proposita additione erit $\frac{23}{5}$; atque adeo verum erit, quod 4 plus $\frac{3}{5}$, producat $\frac{23}{5}$.

Non erit inutile hic reflectere, quod pro additione numerorum integrorum vulgarium, præcise requiratur, atque sufficiat, additio numeratorum manente eodem denominatore; quod verum est, quia omnes numeri vulgares integri, eumdem habent denominatorem. Similiter, quoties fracti numeri habent eumdem, siue communem denominatorem: pro illorum additione, præcise requiritur, & sufficit, additio numeratorum, manente eodem denominatore. Si verò

verò fracti numeri habeant diversum denominatorem, tunc prius per problema 3. capitis 6. reducendi sunt ad alios numeros, prioribus æquivalentes, qui habeant eumdem, sive communem denominatorem; hæc reductio ad communem denominatorem necessaria est, ut haberi possit simplex numerus, æquivalens datis duobus numeris: simplex enim numerus non nisi unius speciei unitates indicat, & per unius speciei unitates, Exempli Gratia (in moneta Romana, in qua unum scutum, æquivalet 10 Iulijs) per Iuliorum unitates, exprimi non potest numerus, qui indicet aggregatum ex quatuor scutis & 5 iulijs: nisi prius 4 scuta reducantur ad iulios: quandoquidem 4 scuta plus 5 iulijs, non constituant summam æquivalentem 9 iulijs; quia tamen 4 scuta, æquivalent 40 iulijs: adeoque 4 scuta reducta ad iulios constituunt 40 iulios: etiam 4 scuta plus 5 iulijs, producunt 45 iulios: eritque verum, quod aggregatum ex 4 scutis & 5 iulijs, æquetur, sive æquivaleat, 45 iulijs: & simplex numerus 45 iuliorum, indicabit aliquid æquivalens aggregato ex 4 scutis & 5 iulijs.

De Subtractione numerorum fractorum vulgarium.

VT inveniatur productum quod oritur ex Subtractione, in qua minor numerus, aufertur ex maiori numero, quando uterque vulgaris est, atque unus ex illis duobus numeris est fractus. Primo, si singuli dati numeri non habeant communem denominatorem, prius per problema 3. capitis 6. reducantur ad alios numeros, habentes communem denominatorem. Quo facto, numerator novi inferioris numeri, subtractus ex numeratore novi superioris numeri, dabit novum numeratorem: qui cum communi denominatore constituet productum propositæ subtractionis.

Exempli Gratia, numerus $\frac{4}{7}$: subtrahendus sit ex numero $\frac{3}{5}$: hos numeros reducendo ad alios, qui communem denominatorem habeant: pro dato superiori numero $\frac{4}{7}$, habebitur novus superior numerus $\frac{21}{35}$: & pro dato inferiori numero $\frac{3}{5}$, habebitur novus inferior numerus $\frac{20}{35}$. Deinde novi atque inferioris numeri, numerator 20, subtractus, ex novi atque superioris numeri numeratore 21, producit 1; quare numerus productus ex proposita subtractione, erit $\frac{1}{35}$: adeoque verum erit, quod $\frac{4}{7}$ minus $\frac{3}{5}$, producant $\frac{1}{35}$. Similiter, si ex integro numero 4, subtrahi debeat fractus numerus $\frac{3}{5}$; hos numeros reducendo ad alios, qui communem denominatorem habeant: pro dato superiori numero 4, habebitur novus superior numerus $\frac{20}{5}$: & pro dato inferiori numero $\frac{3}{5}$, habebitur idem numerus inferior, nimirum numerus $\frac{3}{5}$. Deinde novi, atque inferioris numeri, numerator 3: subtractus ex novi, atque superioris numeri numeratore 20: producit 17; quare, numerus productus ex proposita subtractione, erit $\frac{17}{5}$.

Quemadmodum paulo ante circa additionem, ita hic circa subtractionem utile erit reflectere: quod pro subtractione numerorum integrorum vulgarium, præcisè requiratur, atque sufficiat subtractio numeratorum, manente eodem, sive communi denominatore, qui in omnibus integris numeris est unitas; & similiter pro subtractione numerorum fractorum vulgarium, præcisè requiritur, & sufficit, subtractio numeratorum, manente communi denominatore: quoties dati numeri fracti habent communem denominatorem. Quoties verò dati fracti numeri non habent denominatorem communem, prius per problema 3 cap. 6 reducendi sunt ad alios numeros prioribus æquivalentes, qui habeant denominatorem communem: quandoquidem vulgaris Arithmetica non tradat praxim in qua immediatè subtrahatur numerus aliquis unius speciei ex alterius speciei numero.

De Multiplicatione numerorum fractorum vulgarium.

VT inveniatur productum, quod oritur ex multiplicatione duorum numerorum, quando uterque ex illis numeris vulgaris est, atque ex duobus, saltem unus est fractus. Primo numeratores datorum numerorum multiplicati, dant novum numeratorem: & etiam denominatores multiplicati dant novum denominatorem; denique novus numerator cum novo denominatore, constituit productum ex proposita multiplicatione.

Exempli Gratia, numerus $\frac{4}{7}$ ducendus sit in numerum $\frac{3}{5}$; numerator 4 ductus in numeratorem 3, dabit novum numeratorem 12: & etiam denominator 7, ductus in denominatorem 5, dabit novum denominatorem 35; quare numerus $\frac{12}{35}$ erit produ•tum propositæ multiplicationis; adeoque verum erit, quod numerus $\frac{4}{7}$ ductus in numerum $\frac{3}{5}$, producat $\frac{12}{35}$. Similiter, si integer numerus 4 ducendus sit in integrum numerum $\frac{3}{5}$, numerator integri numeri propositi, qui est 4, ductus in numeratorem fracti numeri qui est 3, dabit novum numeratorem 12: & propositi integri numeri denominator, qui est 1, ductus in propositi fracti numeri denominatorem, qui est 5, dabit novum denominatorem 5: adeoque productum ex proposita

ſita multiplicatione, erit numerus $\frac{12}{5}$; quare verum erit, quod numerus 4 ductus in numerum $\frac{3}{5}$, producat $\frac{12}{5}$.

Ad pleniorem propoſitæ multiplicationis intelligentiam, vtile erit reflectere ad definitionem multiplicationis omnibus vulgaribus numeris communem, quam definitionem habes capite 4. vbi etiam monuimus; pro multiplicatione nihil referre, an dati numeri ſint eiuſdem, vel diuerſæ ſpeciei; quæ cauſa eſt, quod pro tradita hic multiplicatione, non requiratur problema 3. capitis 6. additioni atque ſubtractioni inſeruiens.

De Diuiſione numerorum fractorum vulgarium.

VT inueniatur productum ex diuiſione duorum numerorum vulgarium, quorum aliquis ſit fractus numerus. Primo aſſumatur nouus numerus, qui pro numeratore habeat denominatorem diuiſoris dati, atque pro denominatore habeat numeratorem diuiſoris dati: ſiue, quod idem eſt, diuiſor inuertatur. Deinde inueniatur productum ex numero diuidendo ducto in nouum atque aſſumptum numerum; ſic enim habebis productum propoſitæ diuiſionis.

Exempli Gratia, numerus $\frac{4}{7}$ diuidendus ſit, per numerum $\frac{3}{5}$. Primo numerus aſſumendus erit $\frac{5}{3}$; deinde quia productum ex numero $\frac{4}{7}$ ducto in $\frac{5}{3}$, eſt numerus $\frac{20}{21}$: etiam productum propoſitæ diuiſionis, erit $\frac{20}{21}$: atque adeo verum erit, quod numerus $\frac{4}{7}$ diuiſus per numerum $\frac{3}{5}$, producat $\frac{20}{21}$. Similiter, ſi integer numerus 4 diuidendus ſit per $\frac{3}{5}$: numerus aſſumendus erit $\frac{5}{3}$; deinde quia productum ex numero 4 ducto in $\frac{5}{3}$ eſt numerus $\frac{20}{3}$: etiam productum propoſitæ diuiſionis, erit $\frac{20}{3}$: adeoque verum erit, quod 4 diuiſum per $\frac{3}{5}$, producat $\frac{20}{3}$. Pari modo ſi numerus $\frac{3}{5}$ diuidendus ſit per numerum 4: numerus aſſumendus erit $\frac{1}{4}$: & productum ex numero $\frac{3}{5}$ ducto in $\frac{1}{4}$, producit $\frac{3}{20}$; quare numerus $\frac{3}{5}$ diuiſus per numerum 4, producit $\frac{3}{20}$.

Præcedentes praxes additionis, ſubtractionis, & multiplicationis, numerorum vulgarium fractorum, ſatis immediatè patent ex ipſis definitionibus; praxis hic allata pro diuiſione, non immediatè patet ex diuiſionis definitione; immo ſatis difficilis eſt, ſed tamen non difficulter deducitur ex iis, quæ idea Logiſticæ demonſtrata ſunt, ex quibus breuiter, ſed Logiſtico diſcurſu demonſtratam exhibeo prædictam praxim.

Qua-

Qualeſcunque numeros repræſentent litteræ A, B, C, D.

Dico $\frac{A}{B}$ *per* $\frac{C}{D} = \frac{A}{B}$ *in* $\frac{D}{C}$.

Conſtructio. Littera E, repræſentet productum ex $\frac{A}{B}$ *per* $\frac{C}{D}$.

Demonſtratio. Per conſtructionem $\frac{A}{B}$ *per* $\frac{C}{D} = E$: ergo ex conceptu diuiſionis expoſito præcedenti capite 5. etiam $\frac{C}{D}$ *in* $E = \frac{A}{B}$: ſed per theor. 1. partis 4. Ideæ Logiſticæ, $\frac{A}{B} = \frac{A}{B}$ *in* $\frac{1}{1}$: ergo $\frac{C}{D}$ *in* $E = \frac{A}{B}$ *in* $\frac{1}{1}$: ergo, per axioma 3. partis 4, Ideæ Logiſticæ; $\frac{C}{D}$ *ad* $\frac{1}{1} = \frac{A}{B}$ *ad* E: ſed, per theor. 21. partis 4. Ideæ Logiſticæ, $\frac{C}{D}$ *ad* $\frac{1}{1} =$ C *ad* D: ergo, $\frac{A}{B}$ *ad* E $=$ C *ad* D: atqui, per coroll. theor. 4. part. 4. Ideę Logiſticę etiã $\frac{C}{C}$ *ad* $\frac{D}{C} =$ C *ad* D: ergo, $\frac{A}{B}$ *ad* $E = \frac{C}{C}$ *ad* $\frac{D}{C}$: ergo, per axioma 3 partis 4. Ideæ Logiſticæ, E *in* $\frac{C}{C} = \frac{A}{B}$ *in* $\frac{D}{C}$: ſed, per theor. 1. partis 4. Ideæ Logiſticæ, E *in* $\frac{C}{C} = E$: ergo $E = \frac{A}{B}$ *in* $\frac{D}{C}$: atqui per conſtructionem, etiam $\frac{A}{B}$ *per* $\frac{C}{D} = E$: ergo $\frac{A}{B}$ *per* $\frac{C}{D} = \frac{A}{B}$ *in* $\frac{D}{C}$. Quod erat demonſtrandum.

CAPVT VIII.

De Regula aurea.

Regula quam hic proponimus, ab expoſitoribus practicæ, atque vulgaris Arithmeticæ, appellatur aurea: propter eximios, & maximè vtiles vſus quos habet; aliter etiam appellatur regula trium; vel regula proportionum; quia ex tribus datis numeris, docet inuenire quartum proportionalem.

Exempli gratia, ſuppoſito quod dati, ſiue propoſiti ſint tres numeri, quorum primus ſit A, ſecundus B, tertius C, docet regula aurea inuenire quartum numerum D, ita vt numerus tertius C, ad quartum numerum

H *D, ha-*

D, habeat eamdem proportionem, quam habet primus numerus A, ad secundum numerum B. Vbi aduertendum, quod si productum ex primo numero A, ducto in quartum numerum D, sit æquale producto ex secundo numero B, ducto in tertium numerum C; etiam tertius numerus C, ad quartum numerum D, habebit eamdem proportionem quam primus numerus A, habet ad secundum numerum B. Verum si productum ex primo numero A, ducto in quartum numerum D, non sit æquale producto ex secundo numero B, ducto in tertium numerum C; tunc tertius numerus C, ad quartum numerum D, non habebit eamdem proportionem quam primus numerus A, habet ad secundum numerum B, quod hic notasse satis erit, pro sufficienti intelligentia, & vsu regulæ aureæ quam proponimus; siquidem ex allata productorum æqualitate infallibiliter inferatur proportionum identitas, siue æqualitas, quæ per regulam auream inquiritur. Exponere quid sit duas proportiones esse easdem, siue æquales difficile est, & legitime exponi non potest: nisi præmissa legitima definitione proportionis; quandoquidem intelligi non possit, quid sit duas proportiones inter se æquari: nisi intelligatur, quid sit proportio; iam verò ne quidem apud eos qui tractant de speculatiua Arithmetica, sufficienter declaratum inuenio quid sit illud, quod per vocem proportio intelligendum sit apud Arithmeticos: atque adeo, saltem ego non percipio, quomodo dici possint legitime exponere, quid sit duas proportiones esse easdem, vel æquales. Hac de re, qui plura desiderat, consulere poterit partem quartam Ideæ Logisticæ.

Vt ex datis tribus numeris, quorum primus sit A, secundus B, tertius C, inueniatur quartus proportionalis numerus D: atque ita absoluatur regula aurea, de qua hic agitur. Primo, secundus numerus B, ducatur in tertium numerum C. Deindè ex hac multiplicatione inuentum productum, diuisum per primum numerum A, dabit quartum numerum D, quæsitum.

Exempli gratia, supposito quod primus numerus A sit 2, secundus numerus B sit 5, tertius numerus C sit 6: secundum numerum 5 ducendo in tertium numerum 6: habebitur productum 30: quod productum diuidendo per primum numerum 2, habebitur numerus 15: qui erit quartus proportionalis quæsitus, siue inueniendus per regulam auream; eritque verum: quod tertius numerus 6, ad inuentum quartum numerum 15, habeat eamdem proportionem, quam primus numerus 2, habet ad secundum numerum 5: quod verum esse, legitime inferes ex eo quod primus numerus 2, ductus in quartum numerum 15, producat 30: & etiam secundus numerus 5, ductus in tertium numerum 6, producat 30.

Præsertim pro quæstionibus practicis, quæ mediante regula au-

rea soluuntur, aduertendum est: subinde non satis apparere quis ex datis, siue propositis tribus numeris, dici debeat primus, secundus, aut tertius: quod tamen necesse est, pro vsu regulæ aureæ. Vt igitur hoc cognoscatur, ex ipsa quæstione practica quæ proponitur, iuuabunt subsequentes reflexiones.

Reflexio prima. In quauis practica quæstione quæ mediante regula aurea soluitur, proponuntur tres numeri; ex quibus duo sunt eiusdem speciei, reliquus specie conuenit cum numero inueniendo. Deinde, ex datis duobus numeris qui sunt eiusdem speciei, vnus habet annexam quæstionem, alter non habet annexam quæstionem. Exempli gratia, semper æquali velocitate ambulando, 3 horis conficio 7 milliaria; 12 horis quot milliaria conficiam? in proposita quæstione agitur de quatuor numeris, ex quibus tres numeri cogniti sunt, atque proponuntur in ipsa quæstione; quartus inueniendus est: atque de illo quæritur in quæstione. Præterea, ex tribus numeris datis, siue propositis in quæstione: duo indicant horas quibus iter conficitur; & sunt numeri eiusdem speciei; reliquus indicat milliaria confecta, & specie conuenit cum numero de quo quæritur. Iam vero, ex duobus eiusdem speciei numeris propositis, ac datis, vnus, 12, horas indicans, habet annexam quæstionem: quæritur enim de milliaribus conficiendis 12 horis; alter, 3 horas indicans, non habet annexam quæstionem: quia non quæritur de milliaribus conficiendis 3 horis; quare in proposita quæstione, numerus 3 horarum, & numerus 12 horarum, sunt numeri dati siue propositi atque eiusdem speciei: & numerus 7 milliariorum, specie conuenit cum numero de quo quæritur. Denique numerus 12 horarum, habet annexam quæstionem: & numerus 3 horarum, non habet annexam quæstionem. Idem accidit in reliquis quæstionibus quæ soluuntur mediante regula aurea.

Reflexio secunda. In quæstionibus practicis quæ soluuntur mediante regula aurea, possunt occurrere duo casus inter se diuersi. Primus casus est, quando incrementum numeri habentis annexam quæstionem, requirit incrementum numeri quæsiti. Secundus casus est, quando incrementum numeri habentis annexam quæstionem requirit decrementum numeri quæsiti. Ad quem ex his duobus casibus pertineat quæuis proposita quæstio per regulam auream soluenda, ex ipsius quæstionis consideratione satis commodè infertur. Exempli gratia propositæ sint duæ quæstiones; prima sit illa quæ in præcedenti reflexione, pro exemplo proposita est. Secunda quæstio sit, 3 homines 7 diebus consumunt annonam, 12 homines quot diebus annonam consument? In prima quæstione, numerus 12 horarum, est ille, qui annexam habet quæstionem: & numerus milliariorum conficiendorum est ille de quo quæritur; quoniam verò cæteris paribus manifestum est, pluribus horis plura milliaria confici: etiam patet, quod crescente numero 12 horarum, debeat crescere numerus milliariorum conficiendorum: adeoque primam quæstionem pertinere ad primum casum. In secunda quæstione, numerus 12 hominum, habet annexam quæstionem: & numerus dierum quibus annona consumitur, est numerus de quo quæritur; quoniam vero, cæteris paribus manifestum est, à pluribus hominibus, paucioribus diebus annonam consumi: etiam patet, quod crescente numero 12 hominum, debeat decrescere numerus dierum quibus annona consumitur; adeoque secundam quæstionem pertinere ad secundum casum.

Reflexio tertia. Vt sciatur, quis ex tribus numeris datis in aliqua practica quæstione, quæ mediante regula aurea soluitur, debeat dici primus, vel secundus, vel tertius. Primo aduertendum est, ad quem ex duobus casibus in secunda reflexione propositis pertineat quæstio; etenim si quæstio pertineat ad primum casum, primus numerus erit ille ex datis duobus eiusdem speciei numeris, qui non habet annexam quæstionem: verum si quæstio pertineat ad secundum casum, primus numerus erit ille ex datis duobus numeris eiusdem speciei, qui annexam habet quæstionem. Deinde cognito quis ex datis tribus numeris primus appelletur, liberum est, ex reliquis duobus vnum pro libitu secundum, & alterum tertium appellare. Exempli gratia, quæstio prima paulò ante proposita, pertinet ad primum casum: duo numeri eiusdem speciei, in ista quæstione propositi, sunt 3 horæ, & 12 horæ: atque ex his duobus numeris eiusdem speciei, numerus 3 horarum, non habet annexam quæstionem, qui propterea primus erit; reliqui numeri in quæstione propositi sunt 7 milliaria, & 12 horæ: eritque liberum, numerum 7 milliariorum secundum dicere, & numerum 12 horarum tertium appellare; vel certè numerum 12 horarum vocare secundum & numerum 7 hominum dicere tertium. Similiter quia secunda quæstio paulò ante proposita pertinet ad secundum casum: ex datis duobus numeris eiusdem speciei, quorũ vnus, 3 homines, alter 12 homines indicat: numerus 12 hominum annexam habens quæstionem: primus erit: & liberum est numerum 7 dierum dicere secundum, atque numerum 3 hominum vocare tertium: vel certè numerum 3 hominum secundum, & numerum 7 dierum tertium appellare.

Non ignoro apud scriptores Arithmeticæ practicæ vsu receptam esse, regulæ auræ distinctionem; in directam, & euersam: hanc distinctionem neglexi, vt inutilem pro nostra methodo; in qua regula aurea deberet dici directa, quando primus numerus hoc est numerus per quem multiplicationis productum diuidendum est, non habet annexam quæstionem; euersa dici deberet, quando primus numerus, siue numerus per quem multiplicationis productum diuidendum est, habet annexam quæstionem; verum commodius videtur, in diuersis casibus diuersum ex tribus datis numeris primum appellando, præscribere, vt semper productum ex multiplicatione secundi, & tertij numeri, per primum diuidatur: quam pro diuersis illis casibus, subdiuidere regulam auream, in directam, & euersam, atque pro singulis veluti diuersam solutionem afferre.

Demõstratio regulæ aureæ, immediatè patet ex theoremate 3. partis 4. ideæ logisticę, ex quo theoremate etiam constat duplex alius modus instituendi regulam auream: primus est, secundum numerum prius diuidere per primum, atque huius diuisionis productum ducere in tertium numerum. Secundus modus est, tertium numerum prius diuidere per primum, atque huius diuisionis productum ducere in secundum numerum. Verum hi duo modi subinde minus commodi sunt pro praxi; vtriusque tamen modi breue exemplum propono, supponendo ex datis tribus numeris primum esse 4: secundum esse 8: tertium esse 12; hoc posito, iuxta expositam prius regulam auream, 8 ducendo in 12 producitur 96: qui numerus diuisus per 4 producit 24: adeoque quartus numerus inuentus erit 24. Iuxta primum modum hic insinuatum, numerum 8 diuidendo per 4 producitur numerus 2: qui ductus in 12 producit 24: adeoque iterum numerus inuentus erit 24. Iuxta secundum modum hic insinuatum numerum 12 diuidendo per 4, producitur numerus 3: qui ductus in numerum 8, producit 24: quare rursus, vt prius numerus inuentus erit 24. Ex proposito exemplo apparet: semper eumdem numerum produci, siue modo prius proposito, siue aliquo ex duobus modis hic insinuatis instituatur regula aurea: idem verum esse in quibusuis alijs numeris, praxis docere potest; quare verũ sit, docet supra citatũ theorema: in quo vniuersaliter demõstratur, de quibuslibet numeris verũ esse, quod hic in vno exẽplo verum esse declarauimus.

Non erit inutile hic notare circa tres numeros datos pro regula aurea tres casus diuersos posse occurrere; primus est quando ex datis tribus numeris primus est vnitas simplex; secundus est quando ex datis tribus numeris secundus, vel tertius est vnitas simplex: tertius casus est quando nullus ex datis tribus numeris est vnitas simplex, In primo casu pro regula aurea nihil requiritur præter multiplicationem. In secundo casu nihil requiritur præter diuisionem. In tertio

tertio casu requiritur multiplicatio, & diuisio. Hinc, quam verum est, regulam auream instituere, aut adhibere, nihil aliud esse, quam datis tribus numeris quartum proportialem inuenire: tam verè dici posset, vnum numerum in alterum ducere, nihil aliud esse, quam datis tribus numeris (quorum primus sit vnitas reliqui duo sint qui proponuntur pro multiplicatione) inuenire quartum proportionalem. Similiter dici posset, vnum numerum per alterum diuidere, nihil aliud esse, quam datis tribus numeris (quorum secundus, vel tertius est vnitas, & reliqui duo sint illi qui proponuntur pro diuisione) inuenire quartum proportionalem. Ex quo tandem licebit inferre nullam praxim esse possibilem, quæ sufficiat, vt datis quibuslibet tribus numeris, inueniatur quartus proportionalis: & tamen non sufficiat ad inueniendum productum, quod per multiplicationem, aut diuisionem, oritur ex quibuslibet duobus numeris propositis.

LOGI-

LOGISTICÆ DERIVATIO *EX* VVLGARI ARITHMETICA.

ARGVMENTVM.

IN superioribus capitibus exposuimus eam partem practicæ, atque vulgaris Arithmeticæ, quam in scribenda Logistica aliunde cognitam supposuimus; quare transeo ad alteram præsentis opusculi partem: in qua nobis ostendẽdum est, quomodo exposita vulgaris & practica Arithmetica, conueniat cum Arithmetica practica exposita in primo libro nostræ Logisticæ: vel certe ab illa differat: quod vt clarius atque intelli[illegible] proponam, præsentem [illegible]; vt sic commodius, atque per partes ostendam: Logistica nostræ practicam Arithmeticam, nihil aliud esse, quam Arithmeticam vulgarem quodammodo ampliatam, atque reductam ad maiorem vniuersalitatem: & propemodum singula, quæ practicæ nostræ Logisticæ propria sunt, deriuari ab ijs, quæ vsu recepta inueniuntur in vulgari, practica Arithmetica, superius declarata.

REFLEXIO I.

Quemadmodum vulgaris Arithmetica, ita etiam Logistica practica, quatuor operationibus innititur: & tota consistit in vario vsu istarum operationum. Præterea, fere eadem sunt, præcipua capita, quibus continetur, tum vulgaris, tum Logisticæ nostræ Arithmetica practica.

NOn nego, radicum extractionem ita considerari posse, vt constituat operationem Arithmeticã diuersam à diuisione: immo quia

hoc

hoc modo videbatur considerari ab expositoribus Arithmeticæ practicæ: quinque operationes Logisticas enumero capite 2. libri 1. Logisticæ: nolebam enim absque vlla necessitate aduersari illorum placitis, quorum doctrinam supponebam. Deindè operationum diuersitatem desumendo potius ex modo operandi, aut præscriptis requisitis pro operatione, quam ex ipsis operationum definitionibus: quinque potius, quam quatuor operationes Arithmeticæ forent admittendæ; verum, si vt nobis placet, ex ipsis definitionibus, de operationum Arithmeticarum diuersitate statuendum sit: admissis nostris definitionibus, dici non potest, radicis extractionem, esse operationem Arithmeticam diuersam à diuisione; qua de re consuli posset caput 8. partis secundæ Ideæ Logisticæ: præsuppositis tamen definitionibus, à nobis propositis in quarto vel quinto capite huius opusculi. Præterea licet radicum extractio spectet ad eam operationem, quæ diuisio dicitur: atque etiam ad vulgarem, & practicam Arithmeticam pertineat: tamen in superioribus capitibus nusquam ago de radicum extractione: quandoquidem de illa satis fuse egerim in appendice libri primi Logisticæ: eamque non supposuerim aliundè cognitam.

Vniuersim igitur quatuor vulgaris Arithmeticæ operationes inueniuntur: nimirum, Additio, Subtractio, Multiplicatio, & Diuisio: in ordinato vsu istarum operationum consistit vniuersa Arithmetica practica; quippe quæ aliud non docet, quam ex datis aliquibus numeris, inuenire alios numeros, qui ex datis numeris producuntur, per vnam, vel certè per plures ex quatuor enumeratis operationibus Arithmeticis. Hinc fit, quod practica Arithmetica (exposita numerorum compendiata scriptione) doceat quatuor operationes Arithmeticas: ac postea nihil tradat, nisi præcepta quæ dirigunt ordinem seruandum inter diuersas operationes, quando per plures Arithmeticas operationes inueniendus est aliquis numerus; neque vsquam doceat inuenire numerum, nisi mediante vna, vel pluribus operationibus Arithmeticis: quod eodem modo verum est, siue sermo sit de vulgari Arithmetica, siue sermo sit de illa Arithmetica quæ traditur in nostra Logistica. Hoc vt melius intelligatur, prodesse posset reflexio tertia, quæ proponitur capite quarto partis secundæ Ideæ nostræ Logisticæ.

Præcipua capita quibus continetur, tum vulgaris, tum etiam Logisticæ nostræ Arithmetica practica: dici possunt illa quæ sequuntur.

Primo, numeros compendiata, & commoda scriptione repræsentare: atque ita repræsentatos legere. Hac de re agitur capite primo, & sexto huius opusculi: & etiam capite primo nostræ Logisticæ.

Secundo Operationum Arithmeticarum producta inuenire, aut repræsentare compendiata, & commoda scriptione. Hac de re agitur capite secundo, tertio, quarto, quinto, atque septimo huius opusculi: & capite secundo nostræ Logisticæ.

Tertio. Compendiata, sed propter aliquas circumstantias minus commoda scriptione repræsentatos numeros, reducere ad alios æquiualentes numeros, commodiori scriptione repræsentatos. Hac de re agitur in problematibus capitis sexti, & sparsim in alijs capitibus huius opusculi, præterea in singulis ferè Logisticæ nostræ capitibus, quæ secundum subsequuntur, atque præcedunt octauum, aut septimum.

Quarto. Ex datis aliquibus numeris, inuenire alios, qui ex datis producuntur per plures operationes Arithmeticas. Hac de re agit regula aurea proposita capite octauo huius opusculi; & etiam caput nonum ac septimum nostræ Logisticæ. Præterea, tam Arithmeticæ vulgaris, quam Logisticæ practicæ præscripta fere omnia, quæ non pertinent ad tria capita hic prius enumerata.

REFLEXIO II.

Vsitatum est apud Arithmeticos, considerare numeros actiuos, & passiuos; item numeros, tum formaliter, tum materialiter sumptos. Logistica nostra, à vulgari Arithmetica, differt tantum quo ad numeros compendiatè scriptos, atque formaliter sumptos.

Præter indiuidua nihil indicant numeri, quodque vnum, vel plura indiuidua indicat, numerus dicitur: in diuersis circumstantijs diuersimode intelligitur numerus; subinde enim intelligitur in sensu actiuo, vt significet illud quod indicat, siue repræsentat indiuidua; atque à nobis dicitur numerus actiuus, vel simpliciter numerus appellatur: etenim de actiuis numeris sermo est: quando oppositum non dicitur: vel per circumstantias non sufficienter insinuatur. Subinde numerus intelligitur in sensu passiuo, vt significet ipsa indiuidua indicata à numero actiuo: atque à nobis dicitur numerus passiuus. Præterea numerus aliquando intelligitur in sensu formali, ita vt significet numerum consideratum, vt talis numerus est, tum quo ad vnitates per quas indicat indiuidua, tum quo ad indiuidua

I

uidua quæ indicat: atque à nobis dicitur numerus formaliter sumptus. Aliquando numerus intelligitur in sensu materiali, vt significet numerum in quantum plura, vel pauciora indiuidua indicat: atque à nobis dicitur numerus materialiter sumptus. Vt constet in singulis expositis sensibus adhiberi, atque intelligi numeros: non tantum in nostra Logistica, sed etiam in familiari sermone, atque adeo apud eos, qui non vtuntur nisi vulgari Arithmetica: satis erit afferre paucas loquutiones familiariter vsitatas; ex quibus sufficienter appareant sensus à nobis enumerati. Primo supposito quod duo homines, instituendo, Exempli gratia regulam auream, singuli inueniant numerum indicantem decem aureos: rectè dicitur, singulos per regulam auream inuenisse numerum decem aureorum; & ex ipsa loquutione satis patet, quod sermo sit de numeris quos actiuos appellauimus. Secundo, si dicatur, quod duo homines pro mercede acceperint eumdem aureorum numerum, vel decem aureorum numerum: ex ipsa loquutione satis patet quod sermo sit de numeris quos passiuos diximus. Tertio, considerentur sequentes numeri; primus sit, quatuor ternarij hominum: secundus sit, tres quaternarij hominum; tertius sit vigintiquatuor secundæ: quartus sit, triginta sex tertiæ: quintus sit, duodecim homines, sextus sit, duodecim equi. De istis numeris, etiam apud eos qui tradunt vulgarem Arithmeticam, verificatur: quod omnes inter se specie differant: ac præterea quod omnes inter se æquales sint. Quando de prædictis sex numeris asseritur, quod omnes inter se specie differant, agitur de numeris formaliter sumptis; etenim primus, secundus, & quintus: inter se non differunt, nisi quo ad vnitates per quas indicant duodecim hominum indiuidua; præterea, quintus, & sextus numerus, inter se non differunt, nisi quo ad ipsa indiuidua, quæ indicant: ergo quando sex isti numeri dicuntur omnes inter se specie differre; considerantur tum quo ad vnitates per quas indicant, tum etiam quo ad indiuidua, quæ indicant: atque adeo considerantur numeri formaliter sumpti. Quarto, quando prædicti sex numeri dicuntur omnes inter se æquales esse, agitur de numeris materialiter sumptis; etenim æquales dicuntur in quantum singuli indicant æquè multa, siue duodecim indiuidua; cui æqualitati non aduersatur; quod duodecim indiuidua indicata à primo numero, sint homines; quodque duodecim indiuidua indicata à tertio numero, sint vnitates simplices; item duodecim indiuidua indicata à sexto numero sint equi. Eidem æqualitati non aduersatur, quod in quinque primis numeris, per diuersas vnitates indicentur duodecim indiuidua; ex quibus patet, æqualitatem tantum

tum affirmari de istis numeris, consideratis in quantum æquè multa indiuidua indicant: hoc est de numeris materialiter sumptis.

Hæc sufficere arbitror, vt constet, non tantum in nostra Logistica, sed etiam apud eos, qui vulgari Arithmetica vtuntur, in diuersis circumstantijs, diuerso sensu intelligi numeros: eosque aliquando intelligi in sensu actiuo, aliquando in sensu passiuo, aliquando in sensu formali, aliquando in sensu materiali; ac præterea constat, quid sint numeri actiui, vel passiui, vel formaliter, aut materialiter sumpti: neque hic videntur plura addenda circa primam partem propositæ reflexionis, in qua asseritur etiam in Vulgari Arithmetica considerari numeros, formaliter, atque materialiter sumptos; etenim manifestum est vulgaris Arithmeticæ terminos non excedere duas assertiones paulò ante propositas, in quarum vna asseritur sex numeros ibidem propositos specie inter se differre, in altera verò asseritur eosdem istos sex numeros inter se æquales esse: sed etiam in priori assertione agitur de numeris formaliter sumptis, in posteriori verò agitur de numeris materialiter sumptis, vt constat ex ijs quæ paulò ante notauimus: ergo in vulgari Arithmetica subinde agitur de numeris formaliter sumptis, subinde verò agitur de numeris materialiter sumptis: atque adeo in vulgari Arithmetica considerantur numeri tum formaliter, tum etiam materialiter sumpti.

Vt constet altera pars propositæ reflexionis: primo ostendendum est, vulgarem Arithmeticam, atque Logisticam nostram inter se non differre, quo ad numeros passiuos, hoc est, nulla inueniri indiuidua per Logisticos numeros indicabilia, quæ indicari non possint per numeros vulgares: pro quo in memoriam reuocandum est, quod de simplici vulgari vnitate diximus: eam scilicet ex se indifferentem esse, ad significandum quodcũque indiuiduum; neque excogitari, aut fingi posse vllum indiuiduum, quod ex vi alicuius hypothesis, indicari non possit, à simplici, atque vulgari vnitate: quoniam igitur indiuidua indicabilia à numeris Logisticis, sunt indiuidua: & quælibet indiuidua indicari possint à simplicibus, atque vulgaribus vnitatibus: patet non inueniri vlla indiuidua indicabilia à numeris Logisticis, quæ à vulgaribus atque simplicibus vnitatibus indicabilia non sint: ergo indiuidua indicabilia à numeris Logisticis non differunt ab indiuiduis indicabilibus à numeris vulgaribus; quandoquidem igitur numeri Logistici passiui, atque possibiles non sint aliud, quam indiuidua indicabilia à numeris Logisticis: & numeri vulgares passiui possibiles non sint aliud, quam indiuidua indicabilia à numeris vulgaribus: patet etiam numeros Logisticos pas-

siuos

ſiuos atque poſſibiles, non eſſe diuerſos, à numeris vulgaribus paſſiuis atque poſſibilibus: & conſequenter vulgarem Arithmeticam, atque Logiſticam noſtram inter ſe non differre quo ad numeros paſſiuos.

Vulgarem Arithmeticam, atque Logiſticam noſtram, inter ſe non differre, quo ad numeros materialiter ſumptos: etiam ſatis manifeſtum eſt, ex ijs quæ diximus de numeris materialiter ſumptis; etenim inter numeros materialiter ſumptos, alia differentia non inuenitur, quam quod vnus, altero plura, vel pauciora indiuidua indicet: iam verò ſatis patet quod nullus numerus Logiſticus, tam multa, vel tam pauca indiuidua indicet, vt æque multa, aut pauca indiuidua indicari non poſſint à numero vulgari: igitur Arithmetica vulgaris, atque Logiſtica noſtra inter ſe non differunt, quo ad numeros materialiter ſumptos.

Reliquum eſt vt oſtendam, vulgarem Arithmeticam atque Logiſticam noſtram, inter ſe differre, quo ad numeros formaliter ſumptos; pro quo duplex caſus diſtinguendus eſt: primus caſus ſit, quando ſermo eſt de numeris longiori ſcriptione propoſitis: ſecundus caſus ſit, quando ſermo eſt de numeris repræſentatis compendiatis illis ſcriptionibus, quæ in vulgari Arithmetica, vel in noſtra Logiſtica aſsumuntur, atque adhibentur pro inſtituendis operationibus. Placet prius conſiderare ſecundum caſum, ac deinde tranſire ad primum. Pro ſecundo caſu aduertendum eſt in vulgari Arithmetica deeſſe ſcriptiones compendiatas quibus inter ſe diſtinguantur vnitates poſitiuæ, & negatiuæ: item ſcriptiones compendiatas quibus repræſententur vnitates denominatæ aut radicales: igitur Logiſtica noſtra, poteſt compendiata ſcriptione repræſentare aliquas vnitates formaliter ſumptas, quas compendiata ſcriptione repræſentare non poteſt vulgaris Arithmetica: ergo numeri logiſtici compendiata ſcriptione repræſentati, poſſunt indicare indiuidua, per aliquas vnitates formaliter ſumptas, per quas compendiata ſcriptione iudiuidua repræſentare non poteſt vulgaris Arithmetica; ergo compendiata ſcriptione repræſentati numeri vulgares, non conueniunt cum numeris Logiſticis, quo ad vnitates formaliter ſumptas per quas indiuidua repræſentare poſſunt; ſed numeri qui non conueniunt quo ad vnitates formaliter ſumptas, per quas repræſentant indiuidua, ſunt numeri formaliter ſumpti qui inter ſe non conueniunt: ergo inter ſe non conueniunt numeri vulgares, & Logiſtici, formaliter ſumpti, atque compendiata ſcriptione repræſentati: atque adeo vulgaris Arithmetica cum Logiſtica noſtra non cōuenit quo ad numeros formaliter ſumptos,

tos,

tos, & compendiata ſcriptione repræſentatos. Notandum hic eſt, quod tota differentia propter quam non conueniunt iſti numeri, præcisè, & adæquatè dependeat, atque inferatur, ex diuerſis vnitatibus, non tantum formaliter ſumptis, vel tantum compendiate ſcriptis, ſed ex diuerſis vnitatibus, & formaliter ſumptis, & etiam compendiatè ſcriptis: atque hoc vnico ex capite habetur omnis diuerſitas quæ inuenitur inter vulgaris Arithmeticæ, & Logiſticę noſtræ numeros: quod melius conſtabit ex conſideratione primi caſus paulò ante propoſiti, ſiue conſiderando numeros vulgares, atque Logiſticos productiori ſcriptione repræſentatos, independenter à compendiata ſcriptione. Hoc caſu vulgaris Arithmeticæ, & Logiſticæ noſtræ numeri formaliter ſumpti, conueniunt inter ſe: & verum eſt vulgarem Arithmeticam, & Logiſticam noſtram non differre inter ſe quo ad numeros formaliter ſumptos, ſed non repræſentatos compendiata ſcriptione: etenim omnis differentia quæ inuenitur inter numeros formaliter ſumptos: vel habetur ex diuerſitate indiuiduorum quæ à numeris indicantur, vel ex diuerſitate vnitatum per quas indiuidua indicantur, quando tam indiuidua indicata, quā vnitates indicantes conſiderantur in ſenſu formali, ſiue vt talia indiuidua, aut tales vnitates ſunt: quare, ſi non dentur vlla indiuidua formaliter ſumpta, neque vllæ vnitates formaliter ſumptæ, quæ independenter à compendiata ſcriptione exprimi poſſint à Logiſtica & tamen exprimi non poſſint à vulgari Arithmetica: manifeſtum eſt vulgarem Arithmeticam atque Logiſticam noſtram inter ſe non differre, quo ad numeros formaliter ſumptos, independenter à compendiata ſcriptione; iam vero non dari indiuidua formaliter ſumpta, quæ independenter à compendiata ſcriptione indicabilia ſint à logiſtica, & tamen à vulgari Arithmetica indicari non poſſint: ſatis manifeſtum eſt, quandoquidem paulò ante oſtenſum ſit, vulgaris Arithmeticæ, atque Logiſticæ noſtræ numeros paſſiuos, inter ſe non differre: numeri enim paſſiui, nihil aliud ſunt quam ipſa indiuidua à numeris indicata: hinc indiuidua à numeris vulgaribus atque Logiſticis indicata, atque formaliter ſumpta, inter ſe differrent, etiam inter vulgaris Arithmeticæ & Logiſticæ noſtræ numeros paſſiuos, inueniretur differentia. Deinde, non dari vnitates formaliter ſumptas, quæ independenter à compendiata ſcriptione indicabiles ſint à Logiſtica, & tamen indicari non poſſint à vulgari Arithmetica, patet ex eo, quod ad indiuidua indicanda nullæ aliæ vnitates à vulgaribus diuerſæ, aſſumantur in Logiſtica, quam vnitates denominatæ, radicales, & negatiuæ, quæ ſingulæ à nobis exponuntur vocibus vſitatis in vulgari Arithmetica, atque adeo

inde-

independenter à compendiata scriptione, communes sunt, tam vulgari Arithmeticæ quam nostræ Logisticæ; quare independenter à compendiata scriptione, non inueniuntur vnitates exprimibiles à logistica, quæ à vulgari Arithmetica exprimibiles non sint; præterea tam vulgari Arithmeticæ quam Logisticæ, commune est, expressas vnitates considerare, vt tales vnitates sunt: igitur independenter à compendiata scriptione, non dantur vnitates formaliter sumptæ exprimibiles à Logistica, quæ à vulgari Arithmetica exprimibiles non sint.

Ex iis quæ hic paulo fusius proposita sunt, constant singula quæ in reflexionis titulo notantur: atque adeo inter Logisticæ nostræ, & vulgaris Arithmeticæ numeros, differentiam non inueniri, quæ non dependeat à compendiata scriptione, quod notatu dignum existimaui, & fortassis melius intelligetur ex subsequenti reflexione in qua ostendimus, quomodo ex vulgaris Arithmeticæ compendiatis scriptionibus deriuentur illæ scriptiones compendiatæ, quibus in nostra Logistica exprimuntur numeri, denominati, radicales, & negatiui; etenim istos tantum numeros compendiatè repræsentatos addimus numeris, qui in vulgari Arithmetica repræsentantur compendiata scriptione: atque ex dicendis de deriuatione scriptionum quas adhibemus, pro compendiata repræsentatione numerorum denominatorum, radicalium, & negatiuorum; apparebit, non istos numeros, etiam formaliter sumptos, sed solas compendiatas scriptiones deesse in vulgari Arithmetica.

REFLEXIO III.

Ex vulgari Arithmetica practica deriuantur scriptiones compendiatæ, quibus in Logistica nostra repræsentantur numeri denominati, radicales, & negatiui.

PRæter vulgares numeros, in nostra Logistica considerantur, atque adhibentur, numeri denominati, radicales, & negatiui: his numeris non vtitur vulgaris Arithmetica: singuli tamen ex vulgari Arithmetica deriuantur: hoc est, praxes quibus in Logistica compendiatè exprimuntur, desumptæ sunt ex praxibus pro numerorum compendiata repræsentatione vsitatis, in practica atque vulgari Arithmetica. Deriuationem prædictorum numerorum nostræ Logisticæ paucis expono.

Pro deriuatione scriptionis compendiatæ, qua in nostra Logistica repræsentantur numeri qui denominati appellantur: posita sit hypothesis, quod vnitas simplex sit vnus homo; manente hac hypothesi, ad indicandos decem libros, non sufficit scribere 10: quandoquidem ex vi hypothesis, numerus 10 simpliciter positus, indicet decem homines: vt igitur hoc casu vulgaris Arithmetica, aliqua ex parte compendiata scriptione indicet decem libros, duplicem praxim habet; prima est, scribere, 10 libri. Secunda est, priori hypothesi alteram addere, in qua supponatur, per litteram A, intelligi debere librum; & facta hac hypothesi, scribere, decem A. Ex duabus compendiatis scriptionibus hic propositis, primam superius inuenies, vbi capite 2, vel 3 agimus de Additione, vel Subtractione numerorum diuersæ speciei: & non facile inuenies librum qui agat de vulgari practica Arithmetica, in quo passim non adhibeatur prima scriptio compendiata. Secunda scriptio compendiata adeo familiaris est, in tota, & qualibet parte Arithmeticæ, atque Geometriæ: vt vix vllam paginam inuenias: (Exempli Gratia in toto Euclide) in qua huiusmodi scriptio non adhibeatur: nihil enim familiarius, quam alphabeti litteras ita adhibere, vt breuiter in scriptione repræsentent, triangulum, circulum, lineam, numerum, aut quoduis aliud ens, quod ex vi hypothesis significant. Itaque in casu paulo ante proposito, in quo vnitas simplex hominem significat: in vulgari Arithmetica maximè vsitatæ inueniuntur duæ praxes, quibus aliqua ex parte cõpendiata scriptione repræsentari possint decem libri. Prima est, scribere 10 libri. Secunda est, facta hypothesi, quod A librum significet, scribere decem A. Ex his resultans tertia praxis, hæc est: supponendo quod A librum significet, scribere 10 A. Vtrum hæc tertia praxis vsitata sit in vulgari Arithmetica, non controuerto: eam ex duabus prioribus, atque maxime vsitatis praxibus immediate deriuari, manifestum est; hac tertia praxi compendiate scripti numeri, sunt illi, qui in nostra Logistica appellantur numeri denominati: patet igitur Logisticæ nostræ numeros denominatos, immediate deriuari ex praxibus maxime vsitatis in vulgari Arithmetica, saltem quo ad eam partem quæ constat ex numeratore & dignitate: quandoquidem per vocem dignitas, nihil aliud intelligamus, quam alphabeti litteram, vt paulo ante diximus, assumptam, ad significandum aliquid. De denominatore numerorum denominatorum paulo post recurret sermo.

Numeri vulgares fracti, significant productum ex diuisione: vt satis patet ex prima praxi diuisionis, proposita in quinto capite, atque ex ijs quæ dicta sunt de vulgaribus fractis numeris; quod adeo verum est, vt productum ex numero 2 diuiso per numerum 3, nihil

nihil aliud sit, quam duæ tertiæ: & etiam duæ tertiæ nihil aliud sint, quam productum ex numero 2 diuiso per numerum 3. Quoniam igitur vulgaris Arithmetica specialem atque compendiatam scriptionem assumit, vt repræsentet vulgares fractos numeros: manifestum est vulgarem Arithmeticam assumere specialem atque compendiatam scriptionem, qua repræsentet producta diuisionis. Deinde, quia in hac compendiata scriptione adhibet ipsos diuisionis genitores, vt satis constat ex dictis cap. 6. etiam patet, vulgarem Arithmeticam assumere specialem, atque compendiatam scriptionem, in qua per genitores repræsentat productum diuisionis. Maxime vtilem hanc praxim ampliando, atque imitando: docemus duo diuersa: quorum primum est, compendiata scriptione exhibere productum illius diuisionis, quæ radicis extractio dicitur: hoc est scribere numeros radicales: & similiter compendiata scriptione exhibere productum illius multiplicationis, in qua numerus aliquis in seipsum semel aut sæpius ducitur. Alterum est, compendiata scriptione exhibere productum cuiuslibet operationis diuersæ à duabus hic enumeratis: de hac secunda scriptione agitur in reflexione 4. Ad primam scriptionem pertinent tum numeri radicales, tum etiam numeri denominati in quantum constant ex numeratore, dignitate, & denominatore. Paulo ante ostendimus quomodo ex compendiata scriptione maxime vsitata in vulgari Arithmetica, deriuetur ea pars numeri denominati, quæ numeratorem atque dignitatem repræsentat; huiusmodi numeri denominati, præter numeratorem atque dignitatem, etiam inuoluunt denominatorem; quod nouum non est, immo adeo vsitatum in vulgari Arithmetica, vt nulli vulgares numeri inueniantur, qui non constent ex numeratore & denominatore: vt dictum est capite 6. vbi etiam notauimus, in scribendis numeris vulgaribus, liberum esse, vel denominatorem expresse ponere, vel denominatorem subaudire, quoties denominator est vnitas simplex: eumdem verò denominatorem expresse ponendum esse, quoties diuersus est à simplici vnitate; hanc legem in vulgari Arithmetica vsitatam pro denominatoribus vulgarium numerorum, imitamur, vel vt verius dicam retinemus; tum pro denominatoribus numerorum denominatorum, tum etiam pro denominatoribus radicalium numerorum. Deinde sicut in vulgaris Arithmeticæ scriptione, interposita lineola, numeratori deorsum succedit denominator: sic in numeris denominatis interposita dignitate, numeratori dextrorsum succedit denominator. Denique quemadmodum in vulgaribus numeris denominator, indicat, per quid simplex vnitas diuidi debeat, vt habeatur vna ex vnitatibus

indicatis à numeratore: ita denominator numeri denominati, indicat, quot vnitates indicatæ à dignitate successiue multiplicari debeant, vt habeatur vna ex vnitatibus indicatis à numeratore. Ex his patet nihil inueniri in Logisticæ nostræ numeris denominatis, quod diriuatum non sit ex vulgari Arithmetica.

Pro deriuatione numerorum radicalium, aduertendum est, quod pro illa diuisione quæ radicis extractio dicitur, non detur nisi vnus ex genitoribus diuisionis: pro reliquis diuisionibus, datur vterque genitor diuisionis: de quo plura videri possunt cap. 8. partis 2. Ideæ Logisticæ. Iam verò, pro scriptione, qua vulgaris Arithmetica compendiate exprimit diuisionis productum, requiritur vterque genitor diuisionis: atque adeo hæc scriptio inutilis est, vt per datum radicis genitorem exprimatur radix; neque inuenio scriptionem aliquam compendiatam, atque communi vsu receptam ab expositionibus vulgaris Arithmeticæ: per quam propositi vulgaris numeri, quælibet radix, commode exprimatur per datum genitorem: itaque prius considerando productiorem scriptionem, qua propositi numeri quælibet radix possit exprimi, atque hanc scriptionem contrahendo, efformo eam scriptionem compendiatam, qua vtor in Logistica; in quem finem notandum est, quod propositi numeri A radix, dicatur, ille numerus, qui per vnam aut plures diuisiones producitur ex numero A, supposito semper diuisore eodem, atque æquali ipsi radici. Exem. Gra. numeri 16 radix prima est numerus 4: quia 16 semel diuisum per 4 producit 4. Rursus numeri 16 radix tertia est numerus 2: quia 16 tertio diuisum per 2, producit 2, cum enim 16 diuisum per 2 producat 8, & rursus 8 diuisum per 2 producat 4, ac denique 4 diuisum per 2 producat 2: patet 16 tertio diuisum per 2 producere 2. Ex hoc exemplo etiam patet, eiusdem numeri diuersas radices dari: atque hanc diuersitatem dependere ex eo, quod numerus qui radix dicitur, ex numero cuius radix dicitur, producatur per plures aut pauciores diuisiones; vt igitur longiori scriptione, per ipsum numerum 16 exprimantur, atque inter se distinguantur, diuersæ atque paulo ante propositæ eius radices: ad exprimendum numerum 4, scribi posset, radix, vnica diuisione producta ex numero 16. Item ad exprimendum numerum 2, scribi posset, radix tribus diuisionibus producta ex numero 16. Ex his satis manifestum est, quomodo longiori scriptione (maxime intelligibili apud eos, qui vulgarem Arithmeticam prorsus non ignorant) per numerum exprimi possit quælibet eius radix, siue illa producatur per vnam, siue per plures, & quotlibet diuisiones; iam verò longiores illas scriptiones contrahendo, inuenio eam scriptionem, quam adhibeo pro numeris radicalibus, siue, vt per propositum quemuis numerum, indicem quamlibet eius radicem; & primo quidem, pro integra voce radix assumo litteram R, quæ compendiosè repræsentat vocem radix: huic successiue adscribendo denominatorem, nota Arithmetica expressum, compendiose indico, per quot diuisiones producatur radix, præterea interposito asterismo ipsi denominatori successiue adscribo numerum cuius radix significatur. Denique ante litteram R, quæ repræsentat vocem radix, scribo numeratorem, siue numerum vulgarem indicantem quot radices significentur à scriptione. Sic Exempli Gratia scriptio, 1 R 1 * 16, legitur, vna radix prima numeri sexdecim: vel vna radix prima sexdecim: sed sensus idem est, ac si diceretur, vna radix, vnica diuisione producta ex numero sexdecim. Similiter scriptio 1 R 3 * 16, legitur, vna radix tertia sexdecim: sensus tamen idem est ac si diceretur, vna radix triplici diuisione producta ex numero sexdecim. Pari modo scriptio 4 R 1 * 16, legitur, quatuor radices primæ numeri sexdecim: & sensus idem est, ac si diceretur, quator radices quæ singulæ vnica diuisione producuntur ex numero sexdecim. Item scriptio 4 R 3 * 16, legitur, quatuor radices tertiæ numeri sexdecim: sensus idem est, ac si diceretur, quatuor radices quæ singulæ triplici diuisione producuntur ex numero sexdecim. Ex his satis apparet, vnde deriuata sit illa scriptio Logistica, qua repræsentamus numeros radicales. Apud vulgaris Arithmeticæ Scriptores satis familiare est, radicem quadratam appellare, quam nos primam radicem dicimus; & radicem cubicam nominare, quam nos vocamus radicem secundam; quem vsum, non solum non retinemus: sed planè reijcimus, vt noxium pro nostra Logistica: à qua pro viribus putauimus remouendas loquutiones improprias, analogicas, & æquiuocationibus, atque erroribus obnoxias: tales reputamus paulo ante enumeratas, quas non admittimus. Reliquas verò quibus ab Algebræ Scriptoribus exprimuntur radices tertiæ, quartæ, quintæ, &c. non tantum reijcimus, sed detestamur, non minus quam reliquam ipsorum suppellectilem chimæricam.

Vt numeros positiuos & negatiuos compendiata scriptione distingueremus inter se: hæc lex assumpta est in nostra Logistica: nimirum, vt omnes numeri censeantur negatiui, qui expressè afficiuntur signo negatiuo, hoc est signo —; reliqui verò numeri habeantur positiui. Similis lex passim vsitata inuenitur; considera si placet duas scriptiones non compendiatas, prima sit homo; secunda sit negatio hominis; secunda scriptio significat negationem eius quod à prima indicatur: atque duæ istæ scriptiones inter se tantum differunt penes particulam negatiuam, quæ inuenitur in secunda scriptione, sed non inuenitur in prima scriptione. Similiter posito quod prima scriptio sit non homo; secunda sit negatio non hominis; rursus secunda scriptio significat negationem eius, quod per primam scriptionem indicatur: atque duæ istæ scriptiones inter se non differunt, quam penes particulam negatiuam, quæ in secunda inuenitur, sed deest in prima scriptione. Simili planè modo maxime familiari vsu receptum est; inter se per solam particulam negatiuam distinguere quaslibet duas scriptiones, quarum vna significat negationem eius, quod significatur per alteram. Iam verò ab hoc communi vsu non aliter recedimus quam compendiata scriptione repræsentando particulam negatiuam: atque statuendo, vt signum —, compendiate indicans particulam negatiuam, efficiat, vt scriptio affecta hoc signo, significet negationem eius, quod significaret tali signo destituta: hoc enim est quod præscribitur in lege paulo ante insinuata, atque assumpta in nostra Logistica, pro distinctione numerorum, qui à nobis dicuntur positiui, aut negatiui: de quibus consuli potest secũda pars appendicis libri secundi nostrę Logisticæ.

Exposita deriuatione scriptionum, quibus in Logistica compendiate indicamus numeros denominatos, radicales, & negatiuos: non erit inutile, ex singulis istis compendiatis scriptionibus, aliquam pro exemplo proponere, atque eius significationem exponere, vocibus pro vulgari Aritmetica vsitatis: vt sic melius appareat, vulgarem Arithmeticam non carere aut istis numeris, aut modo eos exprimendi, (tametsi de numeris formaliter sumptis agatur) sed tantum carere illa compendiata scriptione, qua in Logistica à nobis exprimuntur.

Numerus denominatus 4 a 3, formaliter sumptus, nihil est aliud, quam numerus A bis in se, ac deinde ductus in quatuor, sumptus formaliter: vel formaliter sumpti quatuor numeri, qui singuli producuntur ex numero A bis ducto in se.

Numerus radicalis 3 R 1 * 16, formaliter sumptus, nihil est aliud, quam formaliter sumptum productum ex vna diuisione numeri sexdecim, in qua diuisor æquatur producto diuisionis, multiplicatum per tria; vel formaliter sumpti tres numeri, qui singuli producuntur vnica diuisione numeri sexdecim, in qua productum diuisionis diuisori æquatur,

Numerus negatiuus — 4, formaliter sumptus, nihil est aliud, quam numerus quatuor negationum, siue priuationum, vnitatis simplicis, formaliter sumptus.

Planè rudis esset etiam in Arithmetica vulgari, qui non perciperet quid significent numeri hic expressi productiori scriptione: neque negari potest istos numeros pertinere ad vulgarem Arithmeticam: vel vt verius dicam, prædictos numeros præcognitos supponi apud expositores vulgaris practicæ Arithmeticæ; ex multis quæ hoc mihi persuadent duo hic subijcio. Primum est, quod à compendiatis numerorum scriptionibus sumant exordium. Secundum est, quod non inueniam vbi longioribus scriptionibus expressos numeros exponant. Practicæ Arithmeticæ expositoribus ignoscendum est, si solam praxim doceant, atque ex speculatiua Arithmetica supponant notitiam numerorum, quorum practicum vsum exponunt; immo oppositum facere nihil aliud esset, quam cum speculatiua Arithmetica practicam confundere, atque permiscere. Vt tamen verum fatear prorsus non percipio, vnde prædictos numeros cognitos supponant, vel quare illos non definiant atque exponant, qui docent speculatiuam Arithmeticam, ex qua deriuatur Arithmetica, vulgaris practica. Vel si forte alicui videatur ab ipsis sufficienter declaratos numeros, quando statuunt; primo, vnitatem esse secundum quam vnumquodque eorum quæ sunt vnum dicitur; secundo, numerum esse compositam ex vnitatibus mulitudinem; denique præter duas istas definitiones propemodum nihil vlterius afferant, conducens ad numerorum intelligentiam: si inquam alicui videatur, has duas definitiones sufficienter declarare, quid per vnitatem, aut numerum intelligendum sit: ingenij acumen, atque perspicacitatem laudo, atque suspicio. Quam parum definitiones istæ prosint tenuitati meæ, colliges ex subsequentibus paucis dubijs; etenim ex multis pauca tantum afferre volui, quandoquidem pauca sufficiant, vt appareat, quam obscura mihi sint, quæ ab aliquibus, vel habentur, vel saltem asseruntur clarissima.

Primo, quemadmodum aliud est abstracta albedo, à qua subiectum album dicitur; aliud verò subiectum habens abstractam albedinem, quodque ab abstracta albedine quam habet, album dicitur: ita etiam aliud est, abstracta vnitas, à qua subiectum vnum dicitur: aliud vero subiectum habens abstractam vnitatem, quodque ab abstracta vnitate quam habet vnum dicitur, iam verò, nisi fallor, vox vnitas intelligi potest in duplici diuerso sensu: nimirùm in sensu abstracto, vt significet abstractam vnitatem, à qua subiectum habens illam abstractam vnitatem, vnum dicitur: deinde in sensu concreto, vt significet subiectum habens abstractam vnitatem, atque idem quod significat vox vnum. Quæro igitur an vnitas paulo ante definita sit vnitas intellecta in sensu abstracto, vel certe sit vnitas intellecta in sensu concreto? Si secundum dicendum sit, ego certe non video,

deo, quomodo hoc intelligi possit ex definitione proposita, in qua nihil inuenio priorem sensum excludens, atque legentem determinans ad secundum sensum. Si dicendum sit prædictam definitionem indifferentem esse ad vtrumque sensum, vel quod in primo sensu intelligenda sit: ex nostra Logistica, atque eius Idea intelligere poteris, quod licet in hoc Romano Collegio per quindecim integros annos Mathesim publice docuerim: tamen hactenus assequutus non fuerim, quid per vnitatem intelligendum sit apud Arithmeticos: quippe vbique conatus sum inculcare, quod vnitas in sensu concreto intellecta, sit illa, de qua agunt Arithmetici.

Secundo, si numerus est vnitatum aggregatum, quandoquidem aliud sit vnitas, aliud vero sit vnitatum aggregatum: quæro an vnitas numerus sit? si dici debeat vnitatem non esse numerum, non percipio quomodo numero 6 addendo vnitatem, habeatur numerus maior numero 6; etenim posito quod vnitas numerus non sit, quando numerus 6 additur vnitas, tunc numero 6 nullus numerus additur: sed, saltem à me, intelligi non potest quomodo numerus sex fiat maior, quando illi nullus numerus additur: adeoque à me intelligi non potest, quomodo numerus sex fiat maior numerus quando illi vnitas additur, supposito quod vnitas non sit numerus. Rursus supposito quod vnitas numerus non sit, non percipio quomodo Arithmetici numerorum operationibus annumerent additionem, in qua vnitas vnitati additur: vel vnitas ex vnitate subtrahitur; denique his alijsque similibus dubijs turbatus, vbique in logistica doceo vnitatem numerum esse; & prima Arithmeticæ fundamenta non percepi, si iuxta illa dicendum sit, vnitatem numerum non esse.

Tertio in diuersis circumstantijs diuersa intelligi per numerum Arithmeticum, nisi ego aberro, manifestum est ex dictis in præcedenti reflexione: idque verum esse ostendimus, etiam sistendo intra terminos vulgaris Arithmeticæ, quæ ab inuicem distinguit numeros diuersæ speciei: hoc est eos qui simul addi possunt, atque in vnam summam colligi: ab illis, qui simul addi, siue in vnam summam colligi non possunt; ac præterea non confundit numeros inter se æquales, cum illis qui inter se sunt inæquales. Quæro igitur in quo loco expositi inueniantur sensus illi diuersi, quos admittit vox numerus, in diuersis circumstantijs adhibita? Ego certè, etiam apud eos qui ad Euclideam doctrinam scriptis annotationibus, vasta volumina impleuerunt: vix vllum verbum additum inuenio paulo ante hic ex Euclide propositę numeri definitioni; adeò alijs clara est illa definitio in qua præter tenebras nihil video.

RE-

REFLEXIO IV.

Proponuntur aliqua in quibus inter se conueniunt, vel ab inuicem differunt, operationes vulgaris Arithmeticæ & Logisticæ nostræ. Deinde exponitur quomodo posteriores operationes, ex anterioribus deriuentur. Denique obiter notatur aliqua differentia inter nostram Logisticam, & Algebram.

PRimo. Operationes vulgaris Arithmeticæ, subinde quidem per genitores exhibent productum operationis: sed tamen plerumque aliter quam per genitores exhibent operationis productum. Logisticæ nostræ operationes plerumque per genitores exhibent productum operationis: subinde tamen aliter quam per genitores exhibent operationis productum. Hæc assertio quatuor partes habet: circa singulas breuiter noto, vnde constet verum esse quod asseritur. Operationes vulgaris Arithmeticæ subinde per genitores exhibere productum operationis: manifestum est ex prima praxi diuisionis proposita capite 5. vt pluribus ostensum est circa initium præcedentis reflexionis. Operationes vulgaris Arithmeticæ, plerumque aliter quam per genitores exhibere productum operationis: constat ex superiorum capitum praxibus; etenim si excipiatur prima praxis diuisionis, reliquæ omnes, aliter quam per genitores exhibent productum operationis. Operationes nostræ Logisticæ plerumque per genitores exhibere productum operationis: immediatè patet ex praxibus quas libro primo capite secundo nostræ Logisticæ afferimus, pro additione, multiplicatione, atque diuisione; etenim in singulis illis praxibus nihil aliud docetur, quam operationis genitores, certo modo, atque ordine scribendo, per ipsos exhibere productum operationis. Operationes nostræ Logisticæ aliquando aliter quam per genitores exhibere productum operationis: constat ex praxi quam capite secundo libri primi Logisticæ tradimus, pro subtractione: iuxta quam praxim exhibitum subtractionis productum, continet quidem datum superiorem genitorem: sed non continet datum inferiorem genitorem; hic mutato prius signo scribitur in producto: adeoque in producto Logisticæ subtractionis non exhibetur inferior genitor, sed numerus, qui ab inferiori dato genitore tantum differt, quantum vnitates positiuæ, & negatiuæ, differunt inter se; quare prædicta Logisticæ nostræ praxis, aliter quam per genitores exhibet productū subtractionis; qua de re paulo post recurret sermo: & plura inuenies capite 9 partis secundæ ideæ Logisticæ. Præterea licet capite secundo libri primi Logisticæ, non aliter quam per genitores doceamus exhibere productum multiplicationis: tamen subinde etiam aliter quam per genitores exhibemus aliqua multiplicationis producta. Exempli gratia, supposito quod genitores dati pro multiplicatione, inter se non differant, atque numerus denominatus 1 a 1 duci debeat in seipsum: iuxta praxim prædicti secundi capitis Logisticæ, scripto 1 a 1 *in* 1 a 1, per genitores exhibebit productum propositæ multiplicationis: quod idem productum, sed non per genitores exhibebit scriptio 1 a 2: etenim iuxta dicta in capite primo libri primi Logisticæ prædictæ duæ scriptiones inter se æquiualent; atque vtraque exhibet productum ex numero denominato 1 a 1 ducto in se: sed tamen in secunda scriptione, non repræsentantur genitores propositæ multiplicationis: atque adeo hæc secunda scriptio aliter quam per genitores exhibet productum multiplicationis. Similiter scriptio Logistica, qua repræsentamus productum ex illa diuisione, quam radicis extractionem appellamus, aliter quam per genitores repræsentat diuisionis productum.

Secundo. Numeri producti ex operationibus vulgaris Arithmeticæ plerumque sunt numeri simplices, subinde tamen sunt numeri compositi. Numeri producti ex operationibus Logisticis, subinde quidem simplices sunt, plerumque tamen sunt numeri compositi. Rursus proposita assertio, quatuor partes habet, atque circa singulas breuiter noto, quæ sufficiunt vt intelligatur verum esse quod asseritur; suppono tamen simplicis, atque compositi numeri definitiones à me propositas capite 8. libri 1. Logisticæ: neque controuerto, an illæ definitiones legitimæ, vel illegitimæ haberi debeant. Ex operationibus vulgaris Arithmeticæ productos numeros plerumque simplices esse: satis constat ex superioribus capitibus, in quibus egimus de vulgaris Arithmeticæ operationibus: etenim si diuisionem excipias, non inuenies operationem, per quam ex duobus datis numeris simplicibus, producatur alius quam simplex numerus. Ex operationibus vulgaris Arithmeticæ productos numeros aliquando compositos esse; satis patet ex dictis de vulgari diuisione, ex qua non infrequenter producitur numerus compositus ex integro, & fracto vulgari numero. Ex operationibus Logisticis productos numeros plerumque compositos esse, constat ex praxibus additionis, subtractionis, & multiplicationis, traditis capite secundo lido libri primi Logiſticę: etenim iuxta dictas praxes producti numeri omnes compoſiti ſunt. Ex operationibus Logiſticis productos numeros ſubinde ſimplices eſſe: conſtat ex ea diuiſione quæ appellatur radicis extractio, etenim ſcriptio Logiſtica, ſimplicis numeri radicem exhibens repræſentat numerum ſimplicem.

Tertio. Vt vulgaris additio inſtituatur, dati numeri debent eſſe vulgares, atque eiuſdem ſpeciei: vt vulgaris ſubtractio inſtituatur, dati duo numeri debent eſſe vulgares atque eiuſdem ſpeciei, & inſuper datus numerus ſuperior non poteſt eſſe minor dato inferiori numero. Vt inſtituatur vulgaris multiplicatio, aut diuiſio, dati numeri debent eſſe vulgares. Pro quauis logiſtica operatione, ſufficit vt dati numeri ſint Logiſtici. Singulæ partes huius aſſertionis ſatis manifeſtæ ſunt, ex dictis circa ſingulas operationes, de quibus agitur in aſſertione. Quoniam verò nulli numeri poſſibiles ſunt, qui exprimi non poſſint per numeros Logiſticos, & quælibet Logiſticæ operationes inſtitui poſſint circa quoslibet datos numeros Logiſticos: patet operationes Logiſticas tales eſſe, vt inſtitui poſſint circa datos quoſcunque numeros poſſibiles: etiam per datos numeros intelligendo numeros planè incognitos. Ab hac Logiſticarum operationum amplitudine dicuntur operationes vniuerſales: atque hæc ipſa amplitudo, vnica, vel certè planè præcipua cauſa eſt, quare aſſumantur in noſtra Logiſtica.

Quarto. Operationes vulgaris Arithmeticæ non compendiatæ, ſatis immediatè patent ex ipſis operationum definitionibus. Idem verum eſt de ſingulis operationibus Logiſticis quæ proponuntur capite ſecundo libri primi Logiſticæ: ſuppoſita tamen intelligētia ſignificationis quam apud nos habent ſigna † & —; quorum ſignorum ſignificatio ſatis fusè declaratur in ſecunda parte appendicis libri ſecundi Logiſticæ. Non omnes quidem, ſed aliquæ vulgaris Arithmeticæ compendiatæ operationes, indigent demonſtratione: immo meo iudicio inter vulgares Arithmeticæ operationes ſuperius à nobis propoſitas, ſola diuiſio fractorum vulgarium numerorum indiget demonſtratione quam inuenies cap. 7. pag. 57. Compendiatas operationes Logiſticas nuſquam proponimus: tradimus tamen varios modos vtiles vt longiores numeri Logiſtici contrahantur, atque reducantur ad alios magis compendiatos prioribus æquiualentes: atque inter praxes pro Logiſticorum numerorum reductionibus à nobis allatas, nihil inuenio, quod videatur demonſtratione indigere, præter illud, quod circa ſigna † & — præſcribitur, quando duo numeri Logiſtici particula *in*, vel *per* connexi ad vnum numerū reducūtur. Hoc demōſtratū inuenies in parte ſecūda ideæ Logiſticę pag. 62.

Pro

Pro deriuatione Logiſticarum operationum ex vulgari Arithmetica, conſideranda eſt praxis prima diuiſionis vulgaris propoſita capite 5. in hac praxi vulgaris Arithmeticæ, exhibetur productum diuiſionis per ipſos genitores, ſcriptos certo modo, ſiue ordine: etenim nihil aliud docet, quam numero diuidendo, interpoſita lineola ſubſcribere diuiſorem, atque hac ſcriptione exhibere productum diuiſionis; hæc praxis non tantum vtilis eſt, quando diuiſor eſt maior numero diuidendo: ſed etiam in quouis alio caſu: dummodo non curetur ſcriptio breuiſſima, atque clariſſima: ſed ſufficiat ſcriptio compendiata, atque vſitata in vulgari Arithmetica. Hinc patet iuxta vulgaris Arithmeticæ præcepta paſſim vſitata, cuiuſcunque vulgaris diuiſionis productum legitime repræſentari poſſe, per datos duos diuiſionis genitores. Ex hac praxi Arithmeticæ vulgaris deriuantur vniuerſales Logiſticæ noſtræ operationes, capite ſecundo libri primi Logiſticæ propoſitæ, pro additione, multiplicatione, atque illa diuiſione, in qua datur vterque genitor diuiſionis; etenim imitando illud quod in prædicta praxi docet vulgaris Arithmetica, docet noſtra Logiſtica, per genitores certo modo ſcriptos exhibere productum additionis, multiplicationis, & diuiſionis. Harum trium operationum inſinuata deriuatio, talis videri poterat, quæ vlteriori declaratione non indigeret; placet tamen ſingulas ſeorſim proponere, incipiendo à diuiſione, vt additioni immediate ſuccedat ſubtractio, quæ per genitores non exhibet productum.

Pro logiſtica diuiſione, in qua vterque genitor proponitur, atque repræſentatur logiſtica ſcriptione compendiata: retinemus eamdem illam praxim capite 5 propoſitam, quæque pro vulgarium numerorum diuiſione vſitata eſt: atque docemus diuiſionis productum exhibere per ſcriptionem, in qua numero diuidendo interpoſita lineola ſubſcriptus ſit diuiſor; circa hanc praxim, vel potius praxeos vſum, inter Logiſticam, & vulgarem Arithmeticam alia differentia non intercedit, quam quod vulgaris Atithmetica hac praxi non vtatur, niſi circa numeros vulgares compendiate ſcriptos. Logiſtica vtatur eadem praxi, circa quoslibet numeros logiſtica ſcriptione compendiatè repræſentatos. Prædictæ praxi logiſticæ diuiſionis: alteram addimus: in qua numero diuidendo ſucceſſiuè adſcribimus, diuiſorem, interpoſita tamen particula *per*, quæ compendiate ſignificat idem, ac ſi ſcriberetur, *diuiſum per*: Quam parum hæc ſecunda praxis à priori differat, nemo non videt: immo vtriuſque praxis ſcriptiones planè idem ſignificare, ſatis conſtat ex dictis capite 6. quandoquidem idem ſignificent ſequentes lo-

L quutio.

quutiones, nimirum, duæ tertiæ, & duo diuisum per tria. Secundam diuisionis Logisticæ praxim, priori addimus, propter solam commoditatem: quæ præcipuus, vel fortè vnicus finis est, propter quem compendiatæ scriptiones assumuntur, aut à vulgari Arithmetica, aut à Logistica. Iam verò, subinde satis commodum non est, in eadem linea repræsentare vnum numerum alteri subscriptum, interposita lineola: immo quia hoc modo commodè typis exhiberi non poterant fracti vulgares numeri, propemodum vbique omissa est lineola separans fracti numeri numeratorem, à denominatore: vt monuimus pag. 28. Præterea, saltem magis molestum non est per particulam *per*, intelligere voces *diuisum per*: quam easdem voces intelligere, per lineolam separantem duos numeros, quorum vnus alteri subscriptus sit. Hæc sufficient pro deriuatione Logisticæ diuisionis, in qua datur vterque genitor diuisionis. Deriuatio illius diuisionis, in qua non datur nisi numerus diuidendus, quæque radicis extractio dicitur: expositione non indiget; siquidem præter simplicem radicalium numerorum scriptionem nihil contineat: atque in tertia reflexione satis multa dicta sint de origine scriptionis, qua in logistica nostra repræsentantur numeri radicales.

Praxis pro logistica multiplicatione proposita capite secundo libri primi logisticæ: proximè similis est praxi diuisionis; etenim quemadmodum pro diuisione assumitur particula *per*, quæ æquiualeat vocibus *diuisum per*: sic pro multiplicatione assumitur particula *in*, quæ æquiualet vocibus *ductum in*. Præterea, quemadmodum particula *per*, interposita inter duos genitores, significat genitorem qui particulam *per* præcedit, diuisum per genitorem qui subsequitur: ita particula *in*, interposita inter duos genitores, significat anteriorem genitorem ductum in posteriorem; quare non minus manifestum est, quomodo vulgaris Arithmeticæ scriptiones, imitetur ea scriptio, qua multiplicationem logisticam absoluimus, quam altera qua absoluimus Logisticam diuisionem, de qua paulò ante egimus.

Pro deriuatione illius scriptionis, qua absoluimus Logisticam additionem aduertendum apud eos qui vtuntur vulgari Arithmetica, familiarissimum esse: Exempli gratia, lineola interposita successiuè scribere duos numeros vulgares, quorum prior scuta, alter iulios significat: in quo casu lineola separans duos numeros, alioquin successiuè scriptos, æquiualet his vocibus *& insuper*, vel vocibus *simul cum*, aut aliis similibus. Exempla huiusmodi scriptionum, inuenies, in omnibus propemodum mercatorum libris, in quibus congeruntur notæ, acceptæ, aut datæ pecuniæ: vel etiam

mercium acceptarum aut venditarum: Similia exempla passim inuenies, apud eos, qui tradunt vulgarem practicam Arithmeticam vbi agunt de additione aut subtractione numerorum diuersæ speciei: atque adeo dici non debet nouum in vulgari Arithmetica, assumere lineolam connectentem duos numeros successiue scriptos, & æquiualeat vocibus *simul cum*; hunc maxime communem vsum imitando, statuimus in nostra Logistica, vt signa † & — (quibuscunque tandem vocibus exprimantur) interposita inter duos numeros successiuè scriptos, æquiualeant his vocibus *simul cum*; atque adeo significent, numerum ante signum illud scriptum, sumptum simul cum numero scripto post signum. Iam vero in hac lege proposita in appendice lib. 2. Logisticæ, atque vt patet deriuata ex vsu in vulgari Arithmetica maximè familiari, consistit tota praxis additionis logisticæ: pro qua aliud non præscribitur, nisi vt numeri dati pro additione cum suis signis successiuè scribantur: etenim eo ipso quod successiuè cum suis signis scripti sint duo numeri, prior cum posteriore signo † vel — connectitur, & significatur prior simul cum posteriore. Quemadmodum verò prior diuisus per posteriorem significat productum diuisionis: & prior ductus in posteriorem significat productum multiplicationis: ita etiam prior simul cum posteriore significat productum additionis.

Pro deriuatione illius praxis, quã in Logistica tradimus pro subtractione: in memoriam reuocanda sunt, quæ in præcedenti reflexione diximus de numeris positiuis & negatiuis; nimirum semper haberi æquales, vel eiusdem valoris numeros: siue numero A addatur positiuus numerus B; siue ex numero A, subtrahatur negatiuus numerus B: qualescunque numeros repræsentent litteræ A & B; atque similiter semper æquales, vel eiusdem valoris numeros haberi, siue numero A addatur numerus negatiuus B: siue ex numero A subtrahatur numerus positiuus B. Quod cum verissimum sit, atque satis manifestum, ex ipso conceptu numerorum, quos appellamus positiuos & negatiuos: etiam manifestum est, quomodo in ipsa Logistica additione accedente sola signi mutatione (per quam numerus ex positiuo fit negatiuus, vel ex negatiuo fit positiuus) habeatur aliquid planè æquiualens subtractioni. Quandoquidem igitur Additio Logistica deriuetur ex vulgari Arithmetica, vt iam ostendimus: & insuper ex eadem vulgari Arithmetica deriuentur numeri nostri positiui & negatiui, vt dictum est in præcedenti reflexione: satis patet quomodo ex vulgari Arithmetica originem habeat, quod vt ita dicam resultat ex additione Logistica, atque numeris nostris positiuis & negatiuis; tale verò est illud, quod in Logistica præscribitur pro subtractione, siue Logisticæ nostræ subtractio, in qua præscribitur, vt in numero subtrahendo mutetur signum, ac deinde addatur alteri numero, ex quo subtractus repræsentari debet; etenim duorum numerorum additio, accedente vnius signi mutatione, planè æquiualet subtractioni, in qua subtrahitur numerus cuius signum mutatur: vt paulo ante hic notauimus.

Breuiter hic exposuimus, quomodo ex vulgari Arithmetica deriuata sit Logisticæ nostræ subtractio, proposita capite secundo lib. 1. Logisticæ. Operæ pretium videtur, notare alium modum, quo ex vulgari Arithmetica deriuari poterat subtractio planè diuersa ab illa quam adhibemus: sed tamen non diuersa quoad ipsam scriptionem. Integrum nobis erat assumere signum †, vt compendiate repræsentaret vocem plus: & signũ — assumere vt compendiate repræsentaret vocem minus: atque insuper statuere, vt duæ illæ voces signis † vel — repræsentatæ retinerent eamdem significationem, quam habent ad longum scriptæ. Quo posito, quemadmodum in vulgari Arithmetica, 4 plus 3, per genitores indicat productum additionis, & similiter, 4 minus 3, per genitores indicat productum subtractionis: ita etiam scriptio, 4 † 3, per genitores significasset productum additionis: & scriptio, 4 — 3, per genitores significasset productum subtractionis; & consequenter, quemadmodum in vulgari Arithmetica 4 minus 7 est aliquid impossibile, siue chimæricum: etiam concedendum erat 4 — 7, esse aliquid impossibile siue chimæricum: atque adeo vel huiusmodi scriptio admittenda non erat, vel certe admittendi erant numeri chimærici, atque ipso nihilo minores. Nisi fallor, modo hic insinuato, ex vulgari Arithmetica deriuantur scriptiones, in quibus signis † & — vtuntur Algebræ scriptores: quandoquidem admittant numeros ipso niholo minores, vt ipsi met expresse fatentur, & multis exponunt istos numeros chimæricos, atque illorum vtilitatem extollunt. Hos numeros chimæricos, atque ipso nihilo minores non admittit nostra Logistica: quemadmodum non admittit vltimo loco propositam deriuationem scriptionum, in quibus signa † & — adhibentur; quare, tametsi Algebræ, & Logisticæ nostræ communia sint signa † & —: & etiam voces plus & minus, quibus signa ista enuntiantur: tamen inter Algebram & Logisticam nostram intercedit maxima differentia, dependens ab ipsis signis † & —: siquidem in Logistica nostra habeant significationem, planè diuersam à significatione quam habent in Algebra. Etenim, scriptio, 4 — 7, tam in Algebra, quam in Logistica, legitur quatuor minus septem: verum in Algebra significat idem, ac si diceretur, productum ex septem vnitatibus positiuis, sublatis ex quatuor vnitatibus positiuis. In Logistica nostra significat idem, ac si diceretur, quatuor vnitates Positiuæ simul cũ septem vnitatibus negatiuis. Quandoquidẽ igitur maxime differant inter se duæ propositiones, quarum prima sit, productũ ex septem vnitatibus positiuis sublatis ex quatuor vnitatibus positiuis: secunda sit, productum ex quatuor vnitatibus positiuis sumptis simul cum septem vnitatibus negatiuis: manifestum est scriptionem, 4 — 7, planè diuersa significare, in Algebra, & Logistica nostra: licet vtrobique enuntietur per easdem voces, quatuor minus septem. Quanta sit, prædictarũ duarum propositionum diuersitas melius intelliges, si aduertas: primo primam propositionem per genitores indicare productum subtractionis; secundam propositionem per genitores indicare productum additionis. Secundo, primam propositionem non agere de vnitatibus negatiuis: secundam agere de vnitatibus negatiuis. Tertio, primam propositionem indicare productum ex subtractione impossibili in vulgari Arithmetica: secundam indicare productum ex additione possibili in vulgari Arithmetica. Quarto, primam propositionem indicare numerum chimæricum, atque ipso nihilo minorem, & planè incognitum in vulgari Arithmetica: secundam propositionem indicare numerum, verum, realem, ac passim cognitum in vulgari Arithmetica.

Hæc obiter notare volui, vt appareat, quantum à veritate aberrent, qui statuunt, meam logisticam Algebram esse ex eo capite, quod tam in mea Logistica, quam in Algebra, signa † & —, in scriptione adhibeantur, atque iisdem vocibus enuntientur. Certè si huiusmodi, vel temerarij, vel parum prudentes iudices, saltem voces intelligerent, tum in Logistica, tum in Algebra vsitatas: potius oppositum statuerent: nimirum Logistcam nostram Algebram non esse: quandoquidem in mea Logistica, & Algebra, etiam iisdem scriptionibus, & vocibus planè diuersa significentur. Cæterum non nego me Algebram scripsisse, quandoquidem enim nunquam inuenire potuerim eius definitionem, non satis scio quid sit Algebra. Præterea quod pro mea Logistica nihil desumpserim ex Algebra, alia causa non est, quam quod Algebræ proprium nihil inuenerim, quod mihi arrideret: aut conueniret tenuitati ingenij mei; neque per hoc aliquid derogatur excellentiæ ipsius Algebræ: quæ pro se habet tot doctissimorum hominum suffragia, vt pro meis lucubrationibus, vel ex ipso titulo non vulgare ornamentum sperare poteram, si inscribi potuissent, Algebra speciosa. Verum malui

malui tam specioso ornamento carere apud indoctos: quam à doctioribus merito reprehendi, quod cum titulo opusculū non conueniret.

Notare hæc volui, etenim Logisticæ studioso, maximè proderunt, quando aliquem ex tripode pronuntiantem audiet, me Algebram scripsisse; vt inferat huiusmodi Apollinem, ne quidem assequutum terminos vsitatos in Algebra, atque nostra Logistica. Ex hoc deorum genere inueniuntur plures: atque adhuc nuperrime nactus sum in Mathematicis instructorem aliquem: nomen scire non potui: si nomen scirem, tamen hic prætermitterem: neque enim nominare consueui, quos laudare non possum: solam veritatem propugnare contendo, cui non aduersantur, aut nomina aut personæ, sed falsæ, atque erroneæ assertiones: his veritatis hostibus tantummodo infensus sum, atque contrarius. Prædictus meus instructor per varias manus ad me scriptum misit, præferens hoc exordium. *Nimio me honore dignatus es vir eximie, cum mihi Logisticam misisti N. N. cui nullum Mathematicum problema insolubile: exquirens insuper meum de illa iudicium &c.* His præmissis, vaticinia incipit Apollo, iam nunc præsagus quid subsequi debeat priores Logisticæ libros Deinde assignat mihi authores quos legere debeam, vt intelligam, quam præstantem vsum habeant numeri chimærici, nihilo minores: imaginaria numerorum latera &c. Poterat has merces distrahere apud Poëtas, quid mihi cum fabulis? instat tamen, hæc adhiberi in Algebra: quodque in Belgio, & Gallia idem significet Logistica, & Algebra: Grammatico dignum argumentum! pro se citare poterat Lexicon, aut Calepinum, si vox Algebra illic fuisset annotata; miserum me si legisset postremas lineas appendicis libri secundi Logisticæ: vbi monui, voces plus, & minus, correspondentes signis † & —, non significare illud, quod significant apud Grammaticos, quod idem hic paulo ante annotaui: atque addidi, in nostra Logistica, & aliorum Algebra, habere diuersam significationem: quod qui non percipit, certè vel in Logistica, vel in Algebra maximè vsitatos terminos, non assequitur; optarem, vt hæc altissimè inhærerent discenti nostram Logisticam, vt quando audiet aliquos pronuntiantes, Logisticam nostram Algebram esse, neque ignorantum more hæsitabundus, pronunciatis acquiescat: neque etiam grammaticorum more, de sola voce instituat litem: sed inquirat, quid per Algebram intelligant; an scilicet de illa Algebra sermo sit, quæ admittit, atque assumit chimæras: vt sunt numeri nihilo minores: imaginaria numerorum latera: plures quam tres quantitatis dimensiones: proportio æqualitatis nihilo comparata, atque adeo non admissa inter proportiones, quemadmodum nihil non admittitur inter numeros: hoc (vt ita dicam) proportionis nihilo aliæ proportiones minores &c. Certè qui statuit huiusmodi Algebram conuenire cum nostra Logistica, prima Logisticæ nostræ principia non percepit. Si verò per Algebram nihil intelligant, nisi antiquiorem Arithmeticam, atque Geometriam aliquantulum ampliatam, independenter ab omni subsidio desumpto à chimæricis quantitatibus, aut proportionibus, falso non asserit nostram Logisticam esse Algebram: Sed tamen hoc casu, vox Algebra, erit æquiuoca: atque non minus verum erit Logisticam nostram non esse Algebram, quam Logisticam nostram esse Algebram, certum enim est inueniri opera in quibus priori sensu Algebra intelligitur: an similiter opera inueniantur, in quibus posteriori sensu intelligitur Algebra, statuant alij: priori tantum sensu intelligendo Algebram, omnino falsum existimo, Logisticam nostram Algebram esse. An Logistica nostra Algebram assequatur, aut superet, vel certè illi postponenda sit: non est meum statuere; non vulgari laude dignam esse Algebram vltro concedo: tamen vt alibi dixi apparatum eius omni ex parte non approbo:

REFLEXIO V.

Singula, quæ libro primo nostræ Logisticæ circa numeros logisticos traduntur, in capitibus quæ secundum sequuntur, atque octauum præcedunt: vel circa numeros vulgares vsitata sunt in vulgari Arithmetica, vel ex his deriuantur.

Haec reflexio amplectitur considerationem plurimorum capitum libri primi nostræ Logisticæ: de singulis enim pauca notanda sunt.

Primo. Propositis duobus numeris vulgaribus eiusdem speciei, inuenire vnum numerum qui duobus istis numeris: simul sumptis æquiualeat, siue æqualis sit: vsitatum est in vulgari Arithmetica: hoc enim est quod docet additio vulgaris. Similiter prima pars capitis tertij nostræ Logisticæ, tradit praxim inueniendi vnum numerum qui sit æqualis, siue æquiualens, duobus aut pluribus numeris Logisticis inter se similibus. In hac praxi nihil traditur, quod satis immediatè non pateat, aut ex ipsa intelligentia logisticorum numerorum, aut ex vulgari additione, aut subtractione.

Secun-

Secundo. Quemadmodum in vulgaris Arithmeticæ multiplicatione, docetur modus inueniendi vnum numerum, exhibentem productum, quod oritur ex duobus numeris vulgaribus simul multiplicatis: ita etiam pars secunda capitis tertij nostræ Logisticæ, proponit praxim, qua inueniri potest vnus numerus, exhibens productum, quod oritur ex duobus numeris Logisticis simul multiplicatis. In hac praxi duo traduntur: quorum primum est, noui numeratoris inuentio; secundum est, inuentio signi quo nouus numerator affici debet. Primum nihil requirit præter vulgarem multiplicationem: atque adeo nullam difficultatem annexam habet. Alterum neque immediatè patet ex intelligentia Logisticorum numerorum, neque ex vulgari Arithmetica. In vulgari Arithmetica: debita multiplicata per debita, producunt debita; quandoquidem igitur à nobis numeri negatiui debitis comparentur, conformiter ad vulgarem Arithmeticam numerus negatiuus ductus in numerum negatiuum, deberet producere numerum negatiuum: & tamen prædicto loco statuitur, Logisticæ nostræ numerum negatiuum ductum in alium numerum negatiuum, producere numerum positiuum; cur hoc verum sit, non satis immediatè apparet ex ipsa intelligentia numerorum qui à nobis appellantur positiui, aut negatiui; atque eodem modo non satis apparet, quare duo numeri, quorum vnus positiuus alter negatiuus est simul multiplicati, semper producant numerum negatiuum: neque producere possint numerum positiuum. Huius rei demonstrationem inuenies in idea logisticæ pagina 62.

Tertio. In tertia parte capitis tertii Logisticæ proponitur praxis, continens modum inueniendi vnum numerum, qui sit productum ex diuisione instituta circa duos numeros Logisticos: omnino respondens praxi traditæ in secunda parte eiusdem capitis; atque vtrique praxi commune est, quod præscribitur circa signum, quo affici debet productum; alterum in quo differunt prædictæ istæ praxes, difficultatem annexam non habet: quemadmodum enim in priori adhibetur vulgaris multiplicatio, ita in posteriori adhibetur vulgaris diuisio. Quoniam verò in vulgari Arithmetica passim proposita diuisio non sufficit, vt inueniatur productum, Exempli gratia, ex numero 24 plus 12 diuiso per 4 plus 2, nisi prius diuisor ex duobus numeris constans reducatur ad vnum numerum: monui, præscripta in dicta praxi non sufficere, vt facilè absoluatur proposita diuisio. Cæterum citra prædictam diuisoris reductionem, propositam diuisionem absoluere: non excedit limites Arithmeticæ vulgaris. Etenim inquirendo, Exempli gratia, quoties maior ex duobus diuisoris numeris, nimirum 4, contineatur in maiori ex duobus numeris diuidendis, nimirum in numero 24: inuenietur aliquis numerus, qui in proposito casu erit 6; iam verò, si inuentus numerus ductus in totum diuisorem, auferri possit, ex toto numero diuidendo: & tamen non relinquat residuum æquale, vel maius, toto diuisore: inuentus numerus, cum residuo inuento ipsi adscripto, vt docetur in diuisione vulgari, constituet productum quæsitum; si inuentus numerus, ductus in totum diuisorem, auferri non possit ex toto numero diuidendo: erit maior producto quæsito; si auferri possit, sed relinquat residuum æquale, vel maius, toto diuisore: erit minor producto quæsito. Sic in casu proposito, quia 4 continetur sexies in numero 24, & 6 ductum in 4 dat 24: atque insuper 6 ductum in 2 dat 12: & denique 24 plus 12 auferri potest ex 24 plus 12, neque vllum relinquit residuum; 24 plus 12 diuisum per 4 plus 2, producit 6. Similiter, si numerus 28 plus 13 diuidendus sit per 4 plus 2: quia 4 continetur sexies in numero 28: & 6 ductum in 4 dat 24: atque insuper, 6 ductum in 2 dat 12: & denique, 24 plus 12 auferri potest ex 28 plus 13, sic vt residuum sit 5: verum erit, numerum 28 plus 13 diuisum per 4 plus 2 producere $6\frac{5}{4 \text{ plus } 2}$ hoc est $6\frac{5}{6}$. Singula hæc, satis immediate inferuntur ex dictis de vulgari diuisione: quia tamen in vulgari Arithmetica paruam planè vtilitatem habent, expresè non proponuntur: atque hic tantum proposita sunt, vt constet, vulgaris Arithmeticæ limites non excedere prædictas diuisiones, absque reductione diuisoris compositi ex duobus numeris vulgaribus.

Quarto. In quarta parte capitis tertij nihil aliud requiritur, quam inuentio cuiusuis radicis, propositi vulgaris numeri, qui talem radicem habeat: neque nouum est in vulgari Arithmetica, inuenire propositi vulgaris numeri radicem, quam nos primam vel secundam appellamus: quare supposito quod vulgaris Arithmeticæ scriptores, expresè non doceant, nisi vulgaris numeri eam radicem inuenire, quæ à nobis prima aut secunda dicitur: adhuc verum erit, quod in hac quarta parte capitis tertij, vel etiam in appendice libri primi Logisticæ, non proponamus nisi vulgarem Arithmeticam, aliquantulum ampliatam.

Quinto. In quinta parte capitis tertij, nihil vt ita dicam noui proponitur: sed tantum notatur, quomodo per ea quæ continentur præcedentibus eiusdem capitis partibus, contrahi possint longiores Logisticæ scriptiones: atque inueniri, numerus minus compositus, æquiualens alteri magis composito.

Sexto. In quarto capite libri primi, proponitur **Antithesis**, quæ nihil aliud docet, quam ex vna æquationis parte, mutato signo, transferre numerum, ad partem oppositam. Iam verò, ex ipsa intelligentia numerorum, quos positiuos, aut negatiuos appellamus: satis constat, vnum numerum sub contrario signo alteri addere: æquiualenter idem esse, ac numerum cuius signum mutatur, ab altero auferre; (qua de re, satis multa dicta sunt in præcedenti reflexione, quando egimus de Logistica subtractione) ex quo patet, in Antithesi, æquiualenter, ab æqualibus æqualia auferri, vt iterum habeantur æqualia. An forte nouum est in vulgari Arithmetica, à duobus numeris inter se æqualibus, æquales numeros auferendo, inuenire duos alios numeros inter se æquales? praxis, qua hoc fit in vulgari Arithmetica, non aliter differt à praxi, qua idem fit in Antithesi: quam subtractio vsitata in vulgari Arithmetica, differt à subtractione Logistica, vt satis constat ex ijs quæ circa Logisticam subtractionem notauimus in præcedenti reflexione.

Septimo. In quinto capite libri primi, traditur, quomodo per ea, quæ tertio aut quarto capite proponuntur, longiores scriptiones Logisticæ, reduci possint ad magis compendiatas, atque prioribus æquiualentes: atque adeo in hoc quinto capite nihil proponitur nouum, atque diuersum ab ijs, quæ traduntur præcedentibus capitibus; sed tantum notatur aliqua commoditas, resultans ex ijs, quæ prius tradita sunt.

Octauo. Si rectè consideres, quæ traduntur capite sexto aut septimo libri primi, nihil propemodum inuenies, nisi vsum regulæ aureæ, maxime notum in vulgari Arithmetica: præsupposita tamen scriptionum Logisticarum notitia; vel certè cum ipsa regula aurea adhibitas aliquas praxes capitum præcedentium.

Quæ hactenus annotauimus, mihi videntur sufficere, vt constet, in tertio, quarto, quinto, sexto, & septimo capite, libri primi Logisticæ, tradita circa numeros Logisticos, in vulgari Arithmetica vsitata esse circa numeros vulgares: aut ex his deriuari.

Circa octauum caput libri primi Logisticæ nihil occurrit notatu dignum, continet enim definitiones, aut alia aliqua principia nostræ Logisticæ.

R E-

REFLEXIO VI.

Regula Logisticæ, nihil continet, quod in vulgari Arithmetica vsitatum non sit, circa numeros vulgares: atque hinc satis manifestum est, quomodo deriuetur ex vulgari Arithmetica.

Qvemadmodum operationes Logisticæ, differunt ab operationibus vulgaris Arithmeticæ: ita propemodum Logisticæ regula, differt ab ijs, quæ maximè vsitata sunt in vulgari Arithmetica. In Logisticis operationibus, fiunt circa numeros Logisticos; quæ vulgaris Arithmetica docet circa numeros vulgares; pari modo, quod in Logisticæ regula præscribitur circa numeros Logisticos: in vulgari Arithmetica vsitatum est circa vulgares numeros. Vt hoc constet, prius considero singulas partes regulæ Logisticæ; deinde totum ordinem quem præscribit hæc regula; etenim, si neque in partibus, neque in ordine quo partes sibi succedunt, aliquid inueniatur, quod circa vulgares numeros vsitatum non sit apud eos, qui vtuntur vulgari Arithmetica: etiam constabit quomodo Logisticæ nostræ regula, deriuata sit ex vulgari Arithmetica.

Primum Logisticæ nostræ regulæ præscriptum est: vt obseruetur aliquis numerus, ex cuius cognitione dependeat solutio quæstionis, quæ proponitur. An forte apud eos, qui vulgari Arithmetica vtuntur, nouum est, considerando quæstionem propositam, reflectere, ex quo dependeat eius solutio? Si Arithmetico proponatur numerus indicans 120 Iulios, reducendus ad numerum æquiualentem, atque indicantem Scuta; vel petatur, quot Scuta constituant 120 Iulij; non facilè inuenies aliquem tam rudem, qui statim considerando propositam quæstionem, non aduertet, ipsi sciendum esse, quot Iulij æquiualeant vni Scuto: ac petat hoc sibi indicari, si fortè nesciat 10 Iulios æquiualere vni Scuto. Igitur nouum non est in vulgari Arithmetica, considerando propositam quæstionem, reflectere ad aliquem numerum, ex cuius cognitione inferri potest quæstionis solutio: qualis numerus, in proposito exemplo, est numerus 10 Iuliorum vni Scuto æquiualens.

Secundum Logisticæ nostræ regulæ præscriptum est: vt quæstionis propositum exercendo per numerum assumptum, inueniatur æquatio, &c. Quid hoc præscripto magis commune in ea vulgaris Arithmeticæ regula, quæ falsi regula appellatur? In hac regula per assum-

assumptum vulgarem numerum, quæstionis propositum exercetur: idque in hunc finem, vt inueniatur numerus, qui proposito ac cognito alicui numero æqualis sit; quod cum ignorare non possit aliquis, qui practicam vulgarem Arithmeticam didicerit vlteriori expositione non indiget.

Tertium Logisticæ nostræ regulæ præscriptum est: vt æquatio minus simplex, aut commoda, reducatur ad aliam magis simplicem, aut commodam. Quid aliud fit, quando Exempli gratia in vnam summam colliguntur plures numeri Scutorum, Iuliorum, &c. separatim scripti? Etenim plura minora credita addere, atque in vnam summam colligere, aliud non est, quam æquationem consistentem inter totum creditum, & plures minores numeros, reuocare ad simpliciorem, atque commodiorem æquationem, consistentem inter totum creditum & vnum numerum illud indicantem.

Quartum Logisticæ nostræ regulæ præscriptum est: vt inuenta simplicior æquatio resoluatur, &c. Ex æquatione consistente inter 20 Iulios & 2 Scuta, inuenire quot Scutis æquentur, siue æquiualeant 120 Iulij: est resoluere priorem æquationem, Similiter pro simplicium æquationum resolutione, quæ in Logisticæ regula præscribitur: nihil requiritur nisi regula aurea maxime vsitata in vulgari Arithmetica, quare in vulgari Arithmetica omni ex parte nouum dici non potest, quod præscribitur in quarta parte regulæ Logisticæ.

Ex his abunde constat, in nulla parte regulæ Logisticæ præscribi aliquid, quod vsitatum non sit in Arithmetica vulgari. Reliquum est vt videamus, vtrum ex partibus simul positis resultans, vt ita dicam tota regula, constituat complexum aliquod incognitum vulgari Arithmeticæ. In quem finem, placet hic proponere eamdem quæstionem, quæ pro exemplo regulæ affertur in nostra Logistica.

Quæstio hæc est. *Vrbis præsidium milites continet, quorum numerus ignoratur, hoc tamen scitur, quod si præsidium tertia sui parte augeretur, & insuper centum accederent, haberet milites 3000.*

Quæstio proposita solui potest hoc discursu. Facta hypothesi, quod tertia pars præsidij sint 10 milites: ergo totum præsidium erunt 30 milites: ergo 30 plus 10 æquantur 3000 minus 100: ergo 40 æquatur 2900; inuenta hac simplici æquatione, falsa tamen, eam resoluo dicendo, 40 producitur ex numero 10: numerus 2900 ex quo producitur? Vel, inuenio 40 milites, supponendo tertiam præsidij partem esse 10 milites: vt inueniam 2900 milites, quot milites debent contineri tertia parte præsidij? Instituendo regulam auream, inuenio 725; ex quo infero: ergo tertia pars præsidij,

sunt

sunt 725 milites: adeoque totum præsidium sunt 2175 milites.

Ego mihi persuadeo, propositum discursum nihil prorsus continere, quod superet captum eorum, qui modice versati sunt in vulgari Arithmetica: cuius limitibus continentur longe difficiliora; immo totus discursus nihil continet, præter falsi regulam, in forma Syllogistica propositam.

Si propositum hic discursum, conferas cum discursibus quibus cap. 9 libri primi Logisticæ, infertur solutio propositæ quæstionis: facile aduertes, vtrobique eodem modo obseruari Logisticæ regulam: immo vix inuenies differentiam, quæ aliunde resultet, quam ex numeris Logisticis aut vulgaribus; priores enim illic adhibentur, hic verò non adhibentur nisi vulgares numeri: Plura requiri non existimo, vt intelligatur, discursus ordinem, qui in Logisticæ regula præscribitur, nihil continere, quod superet vsum vulgaris Arithmeticæ.

Quandoquidem ex ijs, quæ hactenus breuiter proposuimus, constet, neque in vlla parte regulæ Logisticæ, neque in ordine quo partes sibi succedunt, aliquid inueniri, quod in vulgari Arithmetica nouum sit, atque diuersum à scriptionibus, aut numeris assumptis in nostra Logistica; satis manifestum est, vnde originem habeat; immo, non regulæ Logisticæ, sed potius Logisticæ numeris, atque compendiatis scriptionibus, deberi singula, in quibus vulgaris Arithmeticæ vsum, superat vsus Arithmeticæ traditæ in Logistica; quidquid enim in duplici illa Arithmetica, diuersum est à compendiatis scriptionibus, aut quæ ex huiusmodi scriptionibus resultant: vtrique arbitror commune.

Quod in Logisticæ regula præscribitur, nihil aliud est, quam ordo discursus, qui sæpè commodus est, pro solutione problematum, atque ijs præscribitur qui recenter accedunt ad Logisticam. Partes regulæ Logisticæ, subinde omnes, subinde tantum aliquæ vtiles sunt: quemadmodum in regula aurea præscriptæ partes, subinde omnes, subinde tantum aliquæ vtiles sunt; Exempli gratia, in regula aurea præscribitur multiplicatio, & diuisio, tamen inutilis est diuisio, si ex datis tribus numeris, primus, est vnitas simplex; pari modo inutilis est multiplicatio, si ex datis tribus numeris, secundus vel tertius est vnitas simplex. Rursus licet in regula aurea absolutè præscribatur, vt prius secundus numerus per tertium multiplicetur, ac deinde productum diuidatur per primum numerum: illud tamen necessario obseruandum non esse, patet ex ijs, quæ capite 8 notauimus: illic enim duos alios modos indicauimus, quibus institui potest regula aurea. Pari modo tametsi sæpè commodus sit

totus

totus ordo præscriptus in regula Logisticæ, non ideo illicitum est ab hoc ordine recedere; immo quoties immediate, aut magis commode haberi potest æquatio, ad quam ordinantur priores regulæ partes: planè inutiliter adhiberentur: verùm quemadmodum huius generis monita negliguntur à scriptoribus Arithmeticæ vulgaris, ita etiam negliguntur in nostra Logistica.

REFLEXIO VII.

Ex propositis deriuationibus præcipuarum scriptionum nostræ Logisticæ, facilè infertur, reliquarum scriptionum deriuatio. Præterea licèt præcipua differentia, quæ inuenitur inter vulgarem & Logisticæ nostræ Arithmeticam practicam, vel consistat in compendiatis scriptionibus, vel ex illis resultet: atque adeo parua videri possit differentia inter vulgarem & Logisticæ nostræ Arithmeticam practicam; tamen parua non est Logisticæ nostræ vtilitas: quæ in parua, vt ita dicam, scriptionum diuersitate fundata est.

PRæcipua omnia quæ pertinent ad compendiatam scriptionem nostræ Logisticæ, proposita sunt in superioribus reflexionibus: in quibus nihil dictum est, de charactere $=$, qui compendiate repræsentat vocem *æquatur*, vel vocem *æquiualet*; vel de charactere $\stackrel{\frown}{=}$, qui compendiate repræsentat voces *quod etiam æquatur*, siue, *quod etiam æquiualet*; vel de charactere, o, quando compendiate repræsentat vocem *oppositum*; vel de paucis alijs eiusmodi characteribus; quandoquidem enim ostensum sit, in vulgari Arithmetica nullo modo nouum esse, sed communi vsu receptum, aut lineolas, aut alios characteres assumere, quibus compendiate voces repræsententur: satis manifestum est, quomodo nostra Logistica vulgarem Arithmeticam imitetur, in singulis illis characteribus, quos tantum assumit, vt compendiate repræsentet aliquas voces, quas compendiate repræsentare commodum est: vel quia frequenter recurrunt, vel quia ad longum scriptæ, causant aliquam molestiam, siue minorem commoditatem; quoniam verò, tales videntur characteres assumpti in nostra Logistica, de quibus non egimus in præcedentibus reflexionibus: etiam superfluum existimo, pluribus exponere, quomodo deriuentur ex vulgari Arithmetica.

Si re-

Si rectè consideres præcipua illa capita in prima reflexione proposita, quibus diximus contineri, tum vulgaris, tum etiam Logisticæ nostræ Arithmeticam practicam: atque his addas, quæ in secunda reflexione dicta sunt, de conuenientia, atque differentia numerorum qui considerantur in vtraque ista Arithmetica: non difficulter inferes, præcipuam differentiam quæ inuenitur inter vulgarem & Logisticæ nostræ Arithmeticam practicam, haberi à compendiatis scriptionibus; quod si nobis ipsis fatentibus verum est, facile aliquis suspicari posset, atque inferre: ex tam parua differentia, magni momenti vtilitatem nasci, aut resultare non posse: quid hinc vlterius sequatur, nemo non videt. Verum ne ex erronea eiusmodi præmissa aliquis inferat, erroneas conclusiones, nobis contrarias: rogo vt meminerit, ex parua scintilla contempta maximum nasci posse incendium. Ex leui errore in principijs, sequi posse falsitates maxime enormes. Totius Arithmeticæ atque Geometriæ principia, pauca esse, & vt ita dicam satis contemptibilia, & obuia: tamen quam pulchræ, quam vtiles, quam sublimes, atque ab aliorum cognitione maximè remotæ veritates, solis Arithmeticis atque Geometris cognitæ, atque ex prædictis principijs deductæ inueniuntur? Practica Arithmetica vulgaris, decem notas assumit, vt compendiate repræsentet numeros: tolle has notas, & euertes vniuersam, vt ita dicam, vulgarem Arithmeticam practicam: quandoquidem, non tantum molestum, verum etiam propemodum impossibile sit, vulgaris Arithmeticæ operationes ac regulas instituere, circa numeros, qui neque planè parui sint, neque compendiatis scriptionibus repræsententur; quare si ex paucis compendiatis scriptionibus assumptis pro vulgari Arithmetica practica, resultet tota eius vtilitas, quam prudens nemo negare potest maximam esse: etiam paucæ aliæ compendiatæ scriptiones, assumptæ in nostra Logistica, atque additæ vulgaris Arithmeticæ compendiatis scriptionibus: tales esse possunt ex quibus resultet vtilitas: tantum, aut etiam longe amplius superans, vulgaris Arithmeticæ vtilitatem: quantum, omnes Logisticæ nostræ scriptiones compendiatæ, siue characteres, superant decem vulgaris Arithmeticæ characteres, ipsi etiam Logisticæ communes. Verum huius loci non est pluribus agere de vtilitate, aut practicæ, aut speculatiuæ nostræ Logisticæ; de qua vt aliquid insinuem: suppono aliud esse Mathematicas veritates memoriter tenere, atque illarum sensum assequi: aliud verò esse, assequi quomodo Mathematicæ veritates cohæreant cum principijs, aut ex illis legitime deducantur: sed tamen non minus primum, quam secundum sufficere, vt aliquis dicatur intelligere Mathesim,

aut

aut Mathematicas veritates; quo supposito, habemus duos modos intelligendi Mathematicas veritates, siue duplicem Matheseos intelligentiam; prior Matheseos intelligentia sufficit pro Historico: posterior requiri videtur pro Mathematico; iam verò agendo de posteriori illa Matheseos intelligentia, quæ altera longo interuallo superior est; eo tempore quo auditores mei, scriptam à me Logisticam adhibuerunt: passim expertus sum, paucorum mensium studio in Arithmeticæ, Geometriæ, atque vniuersæ Matheseos intelligentia, maiorem progressum: quam aut ego fecerim, aut ab alijs fieri viderim, spatio plurium annorum. Hoc si verum est: de vtilitate nostræ Logisticæ satis multa, paucis indicaui. Quod verum sit, adductis rationibus non aliter probari potest, quam reliquæ veritates quæ experientia discuntur. Quare, illi qui mihi fidem denegat, aliud replicare non possum, nisi, veni & vide. Si tamen aliquis paulo attentiùs perlegat nostræ Logisticæ Ideam, prius speculatiue, ac deinde practice declaratam: fortassis, absque alia experientia, non difficulter mihi præstabit fidem. Nemo enim, vt opinor, ignorat: in qualibet scientia, maximum compendium afferre, pro pluribus conclusionibus magis restrictis, substituere vnam magis vniuersalem, quæ restrictiores omnes simul amplectatur sua amplitudine: atque ita plurima, paucis complecti. Quandoquidem igitur Logistica nostra, huiusmodi compendia subministret, in veritatibus ad Mathesim spectantibus: nemo non videt, ex hoc capite maximum compendium resultare posse in rebus Mathematicis. Deinde, si nihil sit quod in scientijs maiorem claritatem afferat, quam remotis æquiuocationibus, clarè exposita habere principia, quibus vtitur talis scientia: considerando, quod plurima Matheseos principia, apud alios, aut neglecta, aut male exposita, aut æquiuocationibus implicata: à nobis clare exponantur; vnusquisque facile concludet, nos non parum intelligibilitatis, ac luminis afferre rebus Mathematicis. Omitto cætera, quæ melius intelligi poterunt ex conscripta à nobis Logisticæ nostræ Idea; etenim præcipuum ferè lumen, quod viua voce assero discentibus nostram Logisticam, dependet à duobus capitibus hic insinuatis; ex primo, breuitas: ex altero, claritas resultat; denique ex breuitate composita cum claritate, resultare posse paulo ante annotatam Logisticæ nostræ vtilitatem, non videtur difficulter credibile. Quoniam verò inter Matheseos principia numerantur definitiones, siue expositiones terminorum: atque ab ipsa expositione terminorum resultet lumen, quod viua vox, affert meis auditoribus: mirandum non est, præter tenebras propemodum nihil videre in nostra Logistica, qui illam considerant,

derant, neglecta terminorum expositione quæ à nobis affertur: atque terminis quibus vtimur, eam significationem attribuunt, quam ipsi somniantur: ex quo fit quod de Logistica nostra somniantibus proportionata proferant iudicia; verum quid huiusmodi somniatores statuant parum laboro; si vigilantior aliquis aduerterit me alicubi in errorem incidisse, moneri desidero, vt corrigam errorem meum: etenim in scribendo vltimus finis mihi propositus, alius non est, quam pro viribus prodesse quam plurimis.

Ad maiorem Dei gloriam.

APPENDIX
IN QVA
Luditur in numeris.

ARGVMENTVM.

Practica Arithmetica, non aliter melius discitur, quam exercitio: hoc est, frequenter instituendo Arithmeticas operationes; huic exercitio annexus labor, magna ex parte subleuatur, atque imminuitur, quando curiositate alliciente suscipitur. Quamobrem, traditæ Arithmeticæ practicæ, addo ludos aliquos, pro quibus requiruntur diuersæ operationes Arithmeticæ, etenim Arithmeticæ candidati, examinando an in diuersis numeris semper vniformis sit ludorum successus, non minus vtiliter, sed fortassis minori tædio exercebuntur in operationibus Arithmeticis, quam si occupentur circa numeros, casu tantum, vel exercitij gratia propositos. Non tamen sine vllo delectu quoslibet ludos Arithmeticos propono, sed tantum aliquos, ad indicatum finem, deductos ex primo vel secundo vniuersali theoremate, proposito pagina 89. nostræ Logisticæ: vel certe ex conceptu diuisionis,

N

sionis, aut ex regula aurea. Ex ludis pro tyronibus propositis, pergo ad aliquas quæstiones, ex ipsis ludis natas: sed fortassis potius annumerandas maximè serijs Arithmeticorum considerationibus, quam candidatorum ludis. Denique pro quæstionum resolutionibus requisita aliqua theoremata, propono, ac demonstro: modò tamen, siue stylo vsitato in nostra Logistica:

Pro ludis Arithmeticis, prius exhibeo quinque diuersas praxes, alphabeti litteris subscribendi vulgares numeros: deinde expono ludos circa scriptos numeros. Vbique aduertendum est, quod exempli gratia, per numerum A, intelligi debeat numerus litteræ A subscriptus: siue numerus quem ex vi hypothesis significat littera A: quodque similiter per numeros B, C, D, &c. intelligendi sint numeri, istis litteris subscripti: vel ex vi hypothesis significati per tales litteras. Deinde quod per priores alphabeti litteras, repræsentem numeros qui incogniti supponuntur, illi, qui ludum proponit: eidem cogniti numeri repræsentantur per posteriores alphabeti litteras.

Praxis prima.

Primo. Litteris A & B, singulis, pro libitu numerus aliquis subscribatur. Secundo numeri A & B addantur, atque productum subscribatur litteræ C. Tertio numerorum A & B minor à maiori subtrahatur, & productum subscribatur litteræ D. Quarto numeri C & D addantur, & productum subscribatur litteræ E. Quinto numerorum C & D minor à maiori subtrahatur, & productum subscribatur litteræ F.

A	B
3	7
C	D
10	4
E	F
14	6

Exemplum numerorum scriptorum iuxta primam praxim, hic appositum habes: in hoc exemplo supponitur quod placuerit litteræ A subscribere numerum 3: & litteræ B, placuerit subscribere numerum 7. Ludi qui supponunt numeros scriptos iuxta hanc primam praxim, deriuantur ex theoremate primo vniuersali, quod in nostra Logistica proponitur pagina 89: atque ad numeros restrictum, asserit, quod qualescunque sint numeri A & B, atque differentia numerorum A & B, sit D: aggregatum vero numerorum A & B, sit C: tunc numerorum A & B maiorem, æquari aggregato ex dimidio D & dimidio C; verum numerorum A & B, minorem æquari differentiæ dimidij D, & dimidij C.

Praxis secunda.

Primo. Litteræ A, pro libitu quiuis numerus subscribatur, maior tamen quam sit numerus X: quem numerum X sibi pro libitu assumit, qui alteri præscribit ordinem, quo singulis litteris numeros debet subscribere, atque adeo præscribenti cognitus supponitur. Secundo, numerus X addatur numero A, & productum subscribatur litteræ B. Tertio, numerus X subtrahatur ex numero A, vel numerus A subtrahatur à numero X, & productum subscribatur litteræ C. Quarto, numerus B addatur numero C, & productum subscribatur litteræ D.

A	
16	
B	C
22	10
D	
32	
X	
6	

Exemplum habes hic appositum, in quo supponitur placuisse litteræ A subscribere numerum 16; atque præscribenti cognitum numerum X, esse 6. Ludi qui supponunt numeros scriptos iuxta hanc praxim, deriuantur ex eodem theoremate, ex quo diximus deriuari ludos, qui supponunt numeros scriptos iuxta primam praxim.

Praxis tertia.

Primo. Litteræ A subscribatur quiuis numerus pro libitu. Secundo, duplum numeri A, subscribatur litteræ B. Tertio, triplum numeri A, subscribatur litteræ C. Quarto, numerus B, addatur numero C, & productum subscribatur litteræ D.

A	
13	
B	
26	
C	D
39	65

Exemplum appositum, supponit, placuisse litteræ A subscribere numerum 13. Ludi in quibus supponuntur numeri scripti iuxta hanc praxim deriuantur ex conceptu diuisionis, vt indicatur ad subsequentem praxim, in qua paulo vniuersalius proponitur, quod hic magis restrictum est.

Praxis quarta.

Primo. Litteræ A, quiuis numerus subscribatur; atque à præscribente assumantur quiuis duo numeri, quorum vnum hic appello X, alterum Z. Secundo numerus A ducatur in numerum X, atque productum subscribatur litteræ B. Tertio numerus A ducatur in Z, atque productum subscribatur litteræ C. Quarto numerus B addatur numero C, atque productum subscribatur litteræ D.

Habes appositum exemplum, in quo placuit litteræ A subscribere 7; atque pro numero X assumere 4; denique pro numero Z assumere 9. Ludi in quibus supponuntur numeri scripti iuxta hanc praxim, deriuantur ex conceptu diuisionis: ex quo conceptu, satis patet, quod qualescunque sint numeri A, X, Z, atque A *in* X † Z = C † B: etiam C † B *per* X † Z = A: & præterea C † B *per* A = X † Z.

A
7

B
28

D
91

C
63

X
4

Z
9

Praxis quinta.

PRimo. Litteræ A, subscribatur quilibet numerus, maior tamen numero X, assumpto à præscribente. Secundo numero A addatur numerus X, & productum subscribatur litteræ B. Tertio numerus A ducatur in numerum X, & productum subscribatur litteræ C. Quarto numerus B ducatur in numerum B, & productum subscribatur litteræ D. Quinto numerus C ducatur in numerum 4, & productum subscribatur litteræ E. Sexto numerorum D & E minor à maiori auferatur, & productum subscribatur litteræ F. Septimo inueniatur radix prima numeri F, atque subscribatur litteræ G.

In apposito exemplo, supponitur, placuisse litteræ A subscribere 7 & à præscribente, per numerum X intelligi 3. Ludi in quibus supponitur scriptio hic proposita, deriuantur ex theoremate secundo, quod in nostra Logistica proponitur pagina 89. In hoc theoremate docetur, qualescunque sint numeri, quorum maior A minor X: atque insuper X † A = B: & etiam X *in* A = C; necessario verum esse, quod A — X = 1 R 1 * B 2 — 4 C.

A
7

B 10 C 21

D 100 E 84

F 16 G 4

X
3

Pri-

Primus ludus Arithmeticus.

In quo ex indicato vno alteroue ex scriptis numeris, inuenio alios.

PRimo. Suppositis numeris scriptis iuxta primam praxim, si mihi indices numeros E & F, sumendo singulorum istorum numerorum dimidium habebo duos alios numeros A & B. Sic quia in exemplo apposito primæ praxi, numerus E est 14, eius dimidium erit 7, siue numerus B; & quia numerus F erat 6, eius dimidium est 3, siue numerus A.

Secundo. Suppositis numeris scriptis iuxta secundam praxim, si mihi indices numerum D, sumendo eius dimidium inuenio numerum A. In exemplo secundæ praxis numerus D est 32, sumendo eius dimidium habetur numerus A, qui est 16.

Tertio. Suppositis numeris scriptis iuxta tertiam praxim, si mihi indices numerum D, hunc diuidendo per numerum 5, inuenio numerum A. In exemplo tertiæ praxis, numerus D est 65, quem diuidendo per 5, inuenitur numerus A, qui est 13.

Quarto. Suppositis numeris scriptis iuxta quartam praxim, si mihi indices numerum D, hunc numerum diuidendo per aggregatum numerorum X & Z (qui numeri singuli supponuntur mihi cogniti) inuenio numerum A. In exemplo quartæ praxis numerus D est 91: & quia X est 4, atque insuper Z est 9, aggregatum X & Z erit 13: denique 91 diuidendo per 13, inuenitur numerus A, qui est 7.

Quinto. Suppositis numeris scriptis iuxta quintam praxim, si mihi indices numerum G, illi addendo numerum X (qui supponitur mihi cognitus) inuenio numerum A. In exemplo quintæ praxeos numerus G est 4, cui addendo numerum X qui est 3, habetur numerus A, qui est 7.

Secun-

Secundus ludus Arithmeticus.

In quo præscribo, quid fieri debeat circa numeros iuxta superiores praxes scriptos, atque ex alijs assumptis numeris productos, vt iterum habeantur assumpti numeri.

PRimo. Suppositis numeris scriptis iuxta primam praxim: assero, quod diuidendo singulos numeros E & F per numerum 2, inuenies singulos numeros A & B. In exemplo primæ praxis numerus E est 14, quem diuidendo per 2, habetur numerus B qui est 7; præterea numerus F est 6, quem diuidendo per 2, habetur numerus A qui est 3.

Secundo. Suppositis numeris scriptis iuxta secundam praxim: assero, quod diuidendo numerum D, per numerum 2: siue sumendo dimidium numeri D: habebis numerum A. In exemplo secundæ praxis numerus D est 32, sumendo eius dimidium, habetur numerus A qui est 16.

Tertio. Suppositis numeris scriptis iuxta tertiam praxim: assero, quod numerum D diuidendo per numerum 5: siue sumendo quintam partem numeri D: habebis numerum A. In exemplo tertiæ praxis, numerus D est 65: sumendo huius numeri quintam partem, habetur numerus A qui est 13.

Quarto. Suppositis numeris scriptis iuxta quartam praxim: assero, quod deuidendo numerum D per aggregatum numerorum X & Z (qui duo numeri X & Z supponuntur mihi cogniti, adeoque illorum aggregatum mihi cognitum est, atque illud assigno pro diuisore) inuenietur numerus A. In exemplo quartæ praxis, numerus D est 91: aggregatum numerorum X & Z est 13: denique numerum 91 diuidendo per numerum 13, habetur numerus A qui est 7.

Quinto. Suppositis numeris scriptis iuxta quintam praxim: assero, quod numero G addendo numerum X (qui numerus X mihi cognitus supponitur, atque illum assigno pro additione) inuenietur numerus A. In exemplo quintæ praxis numerus G est 4, cui addendo numerum X qui est 3, habetur numerus A qui est 7.

Ter-

Tertius ludus Arithmeticus.

In quo præscribo, quid fieri debeat circa numeros iuxta superiores praxes scriptos, vt habeatur aliquis numerus mihi cognitus.

PRimo. Suppositis numeris scriptis iuxta primam praxim: assero, quod diuidendo maiorem ex numeris E & F, per maiorem ex numeris A & B: habebis numerum 2; & similiter diuidendo minorem ex numeris E & F, per minorem ex numeris A & B, inuenies numerum 2. In exemplo primæ praxis, maior ex numeris E & F est 14. hunc numerum diuidendo per maiorem ex numeris A & B, qui est 7: habetur numerus 2. Similiter minor ex numeris E & F, est 6: hunc numerum diuidendo per minorem ex numeris A & B, qui est 3: habetur numerus 2.

Secundo suppositis numeris scriptis iuxta secundam praxim: assero, quod diuidendo numerum D per numerum A, inuenies numerum 2. In exemplo secundæ praxis, numerus D est 32, quem diuidendo per numerum A qui est 16, habetur numerus 2.

Tertio. Suppositis numeris scriptis iuxta tertiam praxim: assero, quod diuidendo numerum D per numerum A, inuenies numerum 5. In exemplo proposito in tertia praxi, numerus D est 65: hunc numerum diuidendo per numerum A qui est 13, habetur numerus 5.

Quarto. Suppositis numeris scriptis iuxta quartam praxim: assero, quod diuidendo numerum D per numerum A, inuenies numerum qui est aggregatum numerorum X & Z (quod aggregatum mihi cognitum est, quandoquidem singuli numeri X & Z supponantur mihi cogniti: ac proptera assignare possum quem numerum inuenies) quod aggregatum non in litteris, sed in numero assigno. In exemplo quartæ praxis numerus D est 91: quem numerum diuidendo per numerum A qui est 7: habetur numerus 13, qui est aggregatum numerum X & Z, quandoquidem numerus X sit 4, & numerus Z sit 9.

Quinto. Suppositis numeris scriptis iuxta quintam praxim: assero, quod ex numero A subtrahendo numerum G, inuenies numerum X (qui numerus X supponitur mihi cognitus) atque numerum X non per litteram, sed per numerum indicando, assigno numerum quem inuenies per subtractionem. In exemplo quintæ praxis, nu-

merus

merus A est 7: ex hoc numero subtrahendo numerum G qui est 4, habetur numerus X qui est 3.

Quartus ludus Arithmeticus.

In quo præscribo, quid fieri debeat circa numeros iuxta superiores praxes scriptos, vt habeatur numerus mihi assignatus, qualiscunque ille sit, exempli gratia numerus 25.

PRimo. Suppositis numeris scriptis iuxta primam praxim: assero, quod maiorem ex numeris E & F diuidendo per maiorem ex numeris A & B inuenies numerum, cui si addas 3, atque hoc productum ducas in se ipsum, habebis numerum 25. In exemplo primæ praxis maior ex numeris E & F est 14: & numerorum A & B maior est 7: quare 14 diuidendo per 7 habetur numerus 2: huic numero addendo 3, habetur numerus 5: denique numerum 5 ducendo in numerum 5, habetur numerus 25.

Secundo. Suppositis numeris scriptis iuxta secundam praxim: assero, quod numerum D diuidendo per numerum A, inuenies numerum, cui si addas 7, atque hoc productum subtrahas ex numero 34, habebis numerum 25. In exemplo secundæ praxis, numerus D qui est 32, diuisus per numerum A qui est 16, producit numerum 2: cui addendo 7 habetur 9: denique ex numero 34 subtrahendo numerum 9, habetur numerus 25.

Tertio. Suppositis numeris scriptis iuxta tertiam praxim: assero, quod numerum D diuidendo per numerum A, inuenies numerum, quem ducendo in seipsum habebis numerum 25. In exemplo tertiæ praxis, numerus D est 65: quem deuidendo per numerum A qui est 13, habetur numerus 5: & numerus 5 ductus in numerum 5 producit 25.

Quarto. Suppositis numeris scriptis iuxta quartam praxim: quodque aggregatum numerorum X & Z mihi cognitum sit 13: assero, quod numerum D diuidendo per numerum A, inuenies numerum, cui addendo 12 habebis numerum 25. In exemplo quartæ praxis, numerus D est 91: quem diuidendo per numerum A qui est 7, habetur numerus 13: cui addendo numerum 12 inuenitur numerus 25.

Quinto. Suppositis numeris scriptis iuxta quintam praxim, quodque numerus X mihi cognitus sit 3: assero, quod ex numero A subtrahendo numerum G inuenies numerum, cui addendo numerum 22, inuenies numerum 25. In exemplo quintæ praxis numerus A est 7, ex hoc numero subtrahendo numerum G qui est 4, habetur numerus 3, cui addendo 22 habetur numerus 25.

Nota primo. Ludos Arithmeticos parum prodesse apud eos, qui ludos non ignorant; deinde magis placere quo minus apparet quomodo fiat quod vident fieri. Hinc tertio ludo quartum addidimus, qui vt ita dicam, quo ad substantiam, à tertio non differt: sed ab illo tantum differt, quo ad aliquod condimentum; etenim tam in tertio, quam in quarto ludo, per aliquot operationes institutas circa numeros, saltem magna ex parte mihi incognitos, efficio, tv habeatur numerus mihi cognitus; hunc numerum, in tertio ludo immediate indico: atque adeo tertius ludus simplicior est, & si sæpius repetatur, minus difficulter aduerti potest eius fundamentum; verum in quarto ludo vlterius adduntur aliqua, quæ talia sunt, vt apud eos, qui ludum nouerunt, manifestum sit & quare fiant, & quam diuersimode fieri possint: verum apud eos, qui ludum ignorant, tales tenebras causare possunt, vt nullum in ludo cohærentiam aduertant: atque adeo ludum reddant magis inperceptibilem, atque gratiorem.

Nota secundo. Quemadmodum hic quinque modis diuersis effeci, vt ex numeris maxima ex parte mihi ignotis, semper habeatur idem numerus 25; ita effici posse vt habeatur quiuis alius numerus: & quomodo id fieri possit, videtur tam manifestum, vt vlteriori declaratione non indigeat, etiam apud eos, qui non nisi mediocriter versati sunt in vulgari Arithmetica practica: quibus ignotum esse non potest, quid fieri possit circa cognitum aliquem numerum, vt habeatur alius numerus etiam cognitus: etenim præter hoc vnum, nihil in hoc quarto ludo proponitur diuersum ab ijs, quæ in tertio ludo proponuntur.

Quintus ludus Arithmeticus.

In quo præscribitur, quid fieri debeat circa numeros iuxta superiores praxes scriptos, vt habeatur numerus K, ab alio mente conceptus, atque mihi incognitus.

PRimo. Suppositis numeris scriptis iuxta primam praxim: hæc vlterius præscribo. Primo, vt minor numerorum E & F, diuidatur per minorem numerorum A & B, atque productum subscribatur litteræ G. Secundo, ego assumo aliquem numerum R, exempli

O

pli gratia 5, & iubeo vt numerus K mente conceptus deuidatur per numerum 5 siue R, atque productum subscribatur litteræ H. Tertio vt triplum numeri 5 siue R, diuidatur per numerum G, & productum subscribatur litteræ L. Quarto vt numerus H ducatur in numerum L, & productum subscribatur litteræ M. His peractis, assero, quod si ex numero M auferas tertiam partem, residuum erit numerus K, abs te mente conceptus. Pro exemplo suppono numeros scriptos vt in prima praxi repræsentantur, atque conceptum abs te numerum esse 45, His positis, numerus G erit 2: item numerus H erit 9: item numerus L erit $7\frac{1}{2}$: item numerus M erit $67\frac{1}{2}$, à quo auferendo tertiam partem, quæ est $22\frac{1}{2}$, habetur numerus 45, hoc est numerus *K*.

Secundo. Suppositis numeris scriptis iuxta secundam praxim, hæc vlterius præscribo. Primo vt numerus D diuidatur per numerum A, atque hoc productum subscribatur litteræ G. *Secundo*, ego assumo aliquem numerum R, exempli gratia 7, & iubeo vt numerus K mente conceptus, diuidatur per numerum 7 siue R, atque productum subscribatur litteræ H. Tertio, vt triplum numeri 7 siue R, diuidatur per numerum G, & productum subscribatur litteræ L. Quarto vt numerus H ducatur in numerum L, & productum subscribatur litteræ M. His peractis, assero, si ex numero M auferas tertiam partem, residuum erit numerus K abs te mente conceptus. Pro exemplo suppono numeros scriptos vt repræsentantur in secunda praxi, atque conceptum abs te numerum K esse 56. His positis, numerus G erit 2: Item numerus H erit 8. item numerus L erit $10\frac{1}{2}$: item numerus M erit 84, à quo auferendo tertiam partem quæ est 28, habetur numerus 56, hoc est numerus K.

Tertio. suppositis numeris scriptis iuxta tertiam praxim; hæc vlterius præscribo. Primo, vt numerus D diuidatur per numerum A, atque hoc productum subscribatur litteræ G. Secundo ego assumo aliquem numerum R, exempli gratia 7, & iubeo vt numerus G diuidatur per 7 siue R, & productum subscribatur litteræ H. Tertio, vt numerus K diuidatur per numerum H, & productum subscribatur litteræ L. His peractis, assero, quod numerum H ducendo in numerum L, inuenies numerum K à te mente conceptum. Pro exemplo, suppono numeros scriptos vt repræsentantur in tertia praxi, atque conceptum numerum K esse 30. His positis, numerus G erit 5: item numerus H erit $\frac{5}{7}$: item numerus L erit 42: denique numerus H siue $\frac{5}{7}$ ducendo in numerum 42, habetur numerus 30. hoc est numerus K.

Quar-

Quarto, suppositis numeris scriptis iuxta quartam prixim, hæc vlterius præscribo. Primo vt numerus D diuidatur per numerum A, atque hoc productum subscribatur litteræ G. Secundo, vt numerus *K* diuidatur per numerum G, atque productum subscribatur litteræ H. Tertio, ego assumo aliquem numerum R, exempli gratia 3, & iubeo vt numerus H ducatur in numerum R, atque productum subscribatur litteræ L. Quarto vt numerus G diuidatur per numerum 3 siue R, & productum subscribatur litteræ M. His peractis, assero, quod numerum L ducendo in numerum M, inuenies numerum *K* à te mente conceptum. Pro exemplo suppono numeros scriptos vt repræsentantur in quarta praxi, atque conceptum à te numerum *K* esse 40. His suppositis, numerus G erit 13. item numerus H erit $3\frac{1}{13}$: item numerus L erit $9\frac{3}{13}$: item numerus M erit $4\frac{1}{3}$: denique numerum L, hoc est $9\frac{3}{13}$, ducendo in numerum M hoc est $4\frac{1}{3}$, inuenies numerum *K* hoc est 40.

Quinto. Suppositis numeris scriptis iuxta quintam praxim, hæc vlterius præscribo. Primo, vt litteræ G subscribatur idem ille numerus, qui in quinta praxi vocatur G: vel quiuis alius iuxta quintam praxim scriptus, aut ex illis vtcunque productus: vel denique quiuis numerus pro libitu assumptus. Secundo, vt fiant quæ hic præscripsimus suppositis numeris scriptis iuxta tertiam, vel quartam praxim: vtrouis enim modo prodibit numerus *K* à te mente conceptus.

Quæ in hoc quinto ludo Arithmetico præscribuntur dependent à regula aurea, non tamen instituta priori modo quo docetur capite 8 huius opusculi, quemque illic notauimus commodiorem esse: sed à regula aurea instituta, secundo, aut tertio modo insinuato in supra citato capite: vel certe à regula aurea, quæ mediante sola diuisione absoluitur. An alij Arithmetici aduerterint, vel sola diuisione, vel sola multiplicatione in quouis casu absolui posse regulam auream, prorsus ignoro: apud neminem id notatum inueni; quapropter vtrumque illum modum instituendi regulam auream sub quæstionis titulo propono; prius tamen pauca aliqua insinuanda sunt circa propositos ludos Arithmeticos.

Ludus Arithmeticus gratior est, quo meliori modo proponitur; insinuatis ludis Arithmeticis aliunde petita ornamenta addere nolui, tum ne essem longior, tum etiam ne videar potius iocari, quam serio ludere; ego certe inutiles aut pueriles iocos non apprehendo in ludis propositis: etenim vtile dulci miscendo, discentium profectum curare: non est pueriliter iocari; iam vero, quo fine ludos

Arith-

Arithmeticos proposuerim, satis insinuaui initio huius appendicis. Deinde ipsos ludos, legitimo discursu deducere ex fontibus ex quibus deriuantur, tam facile non est, vt post mediocrem profectum dedeceat speculatiuæ Arithmeticæ studiosum. Præterea me non parum iuuant, vt commode, & plures simul, etiam aliquo modo inuitos traham ad examen, ex quo mihi sufficienter constet, quantum profecerint in practica Arithmetica; modum in vnico exemplo insinuo. Exempli gratia, pronuntio, quod si ex pluribus præsentibus singuli scribant numerum pro libitu, mihi ignotum: atque circa scriptum numerum instituant paucas operationes à me præscribendas: effecturum me, vt singuli (tametsi diuersum numerum scripserint) habeant eumdem, atque mihi cognitum numerum. Vel certe effecturum me, vt apud singulos vltimæ operationis productum, sit ille numerus, quem me inscio subscripserint litteræ *K*. Quando huiusmodi propositiones audiuntur, curiositas inuitat ad experimentum; & paucos inuenies, qui nolint experientia discere veritatem: quam dum volunt experiri, nihil simile suspicantes, sese sistunt examini. Si prioris propositionis veritas probanda est, quartum ludum adhibeo; pro posteriori propositione adhibeo quintum ludum: atque ex diuersis modis quos singuli ludi admittunt, illum eligo, qui requirit operationes circa quas volo instituere examen. Denique, si dicant me aberrasse, certo concludo ipsos nescire præscriptas operationes; si dicant me non aberrasse, constat mihi, præscriptas à me operationes legitime ab ipsis institutas esse.

Paulo superius monuimus, quintum ludum hic propositum, deriuari ex regula aurea, de qua agitur capite 8 huius opusculi: vbi affertur triplex modus diuersus inueniendi numerum, quem per hanc regulam inquiri diximus; in singulis tamen modis præscribitur multiplicatio, & diuisio: atque ab his modis instituendi regulam auream, diuersus est aliquis modus, qui adhibetur in quinto ludo: quandoquidem non præscribat multiplicationem. Hinc nascitur argumentum subsequentium quæstionum, in quibus inquiritur, an sola multiplicatio, vel sola diuisio sufficiat, tum pro regula aurea circa propositos quoslibet numeros instituenda: tum etiam pro regula aurea, instituenda in casu in quo aliquis ex datis tribus numeris est vnitas: quo casu non differt à duabus postremis operationibus Arithmeticis, quarum altera multiplicatio, altera diuisio dicitur. Prædictis quæstionibus, addo alteram, prioribus affinem, eo ex capite, quod ad eius intelligentiam requiratur distinctio, quæ intercedit inter diuisionem, de qua agit Arithmetica, quando docet numerum in partes diuidere: & diuisionem, de qua agit Geometria, quando docet lineam rectam diuidere in partes. His quæstionibus accedunt theoremata quibus innituntur quæstionum solutiones.

Quæstio I.

Quomodo ex datis quibuslibet tribus numeris vulgaribus, inueniri posſit quartus proportionalis, mediante sola diuisione.

Solutio. Ex datis tribus numeris primus diuidatur per secundum, vel per tertium numerum: atque per productum ex hac diuisione, diuidatur reliquus numerus. Sic enim producetur quartus proportionalis quæsitus, & per solam diuisionem absoluetur regula aurea.

Exempli gratia, primus numerus sit 12. Secundus numerus sit 3. Tertius numerus sit 20. Primum numerum 12, diuidendo per secundum numerum 3: habetur numerus 4. Deinde, tertium numerum 20, diuidendo per inuentum numerum 4: habetur numerus 5; qui est quartus proportionalis quæsitus. Rursus primum numerum 12, diuidendo per tertium numerum 20: habetur numerus $\frac{12}{20}$. Deinde secundũ numerum 3, diuidendo per inuentum numerum $\frac{12}{20}$: habetur numerus 5; qui est quartus proportionalis quæsitus. Solutionem in quolibet casu legitimam esse, constat ex primo theoremate mox proponendo.

Quæstio II.

Quomodo ex datis quibuslibet tribus numeris vulgaribus, inueniri posſit quartus numerus proportionalis, mediante sola multiplicatione.

Solutio, Primo, assumatur numerus cuius numerator sit vnitas, denominator vero sit primus numerus propositus; quomodo hoc commode fiat, quando primus datus numerus fractus est, dicitur in nota. Deinde assumptus numerus ducatur in secundum datum numerum. Denique hoc productum ducatur in tertium datum numerum. Sic enim habebitur quartus proportionalis quæsitus.

Nota. Scriptione vsitata in vulgari Arithmetica, exhibere numerum

merum cuius numerator fit vnitas, denominator vero fit propositus numerus: commodum est, quando propositus numerus est vulgaris integer: etenim hoc casu, sufficit, interposita lineola vnitati subscribere propositum numerum; idem tamen ita commodum non est, quando propositus numerus est vulgaris fractus; quia interposita lineola vnitati fractionem subscribere, vsitatum non est in vulgari Arithmetica; vt hoc fiat praxi vsitata in nostra Logistica, potest interposita lineola vnitati subscribi fractio, repræsentata mediante particula *per*; verum hæc scriptio non facit ad præsentem casum, in quo agimus cum illis, qui tantum didicerunt vulgarem Arithmeticam, aut non vtuntur, nisi scriptionibus vsitatis in vulgari Arithmetica. Vt huiusmodi scriptione, saltem æquiualenter, & commodè exprimatur numerus, cuius numerator fit vnitas, denominator vero fit propositus fractus numerus vulgaris: sufficit propositum fractum numerum inuertendo, efficere, vt eius numerator fiat denominator, & viciſſim eius denominator fiat numerator. Exempli gratia, suppositus numerus fit $\frac{3}{8}$ atque repræsentari debeat numerus cuius numerator fit vnitas, denominator vero fit propositus numerus: scribendo $\frac{8}{3}$, saltem æquiualenter, habebis intentum. Aliter scriptionem Logisticam adhibendo, scribi posset $\frac{1}{3 \text{ per } 8}$, vel certe 1 *sed per* 3 *per* 8; tres enim postremæ scriptiones, inter se æquales numeros indicant.

Pro exemplo propositæ solutionis. Primus numerus fit 12. Secundus numerus fit 3. Tertius numerus fit 20. Itaque assumptus numerus erit $\frac{1}{12}$; hic numerus ductus in 3, producit $\frac{1}{4}$; denique hoc productum ducendo in numerum 20, habetur numerus 5. qui est quartus proportionalis quæsitus. Rursus, primus numerus fit $\frac{3}{8}$. Secundus numerus fit 4. Tertius numerus fit 6. Itaque assumptus numerus erit $\frac{8}{3}$; hic numerus ductus in 4 producit $10\frac{2}{3}$; denique hoc productum ducendo in numerum 6, habetur numerus 64; qui est quartus proportionalis quæsitus. Solutionem vniuersaliter veram esse constabit ex secundo subsequenti theoremate.

Quæstio III.

Quomodo inueniri poſsit productum diuiſionis, mediante sola multiplicatione.

SOlutio. Assumatur numerus, in quo numerator fit vnitas: & denominator, fit diuisor datus pro diuisione; quomodo hoc commode fieri poſſit, quando diuisor datus est fractus numerus; dicitur in nota præcedentis quæstionis. Deinde assumptus numerus ducatur in numerum diuidendum. Sic enim habebitur productum ex proposita diuiſione.

Exempli gratia, numerus 12 diuidendus fit per numerum 4, Assumptus numerus erit $\frac{1}{4}$; hunc numerum ducendo in numerum 12, habetur numerus 3, qui idem numerus producitur, quando 12 diuiditur per 4. Rursus numerus 12 diuidendus fit per numerum $\frac{3}{5}$. Assumptus numerus erit $\frac{5}{3}$, hunc numerum ducendo in numerum 12, habetur numerus 20; qui idem numerus habetur quando 12 diuiditur per $\frac{3}{5}$. Solutionem vniuersaliter veram esse, constabit ex subsequenti tertio theoremate.

Quæstio IV.

Quomodo inueniri poſsit productum multiplicationis, mediante sola diuiſione.

SOlutio. Assumatur numerus in quo numerator fit vnitas, denominator vero fit vnus ex duobus numeris datis pro multiplicatione; de quo agitur in nota secundæ quæstionis. Deinde alter numerus datus pro multiplicatione, diuidatur per assumptum numerum. Sic enim habebitur productum propositæ multiplicationis.

Exempli gratia, numerus 3 ducendus fit in numerum 4. Assumptus numerus erit $\frac{1}{3}$, vel certe $\frac{1}{4}$: liberum enim est quemuis ex his duobus numeris assumere. Deinde numerum 4, diuidendo per $\frac{1}{3}$, habetur 12; & similiter numerum 3, diuidendo per $\frac{1}{4}$, habetur 12; qui idem numerus 12 habetur, quando numerus 3 ducitur in numerum 4. Rursus, numerus 6 ducendus fit in $\frac{2}{3}$. Assumptus numerus erit $\frac{1}{6}$, vel certe $\frac{3}{2}$. Deinde $\frac{2}{3}$ diuidendo per $\frac{1}{6}$, habetur numerus 4; & etiam numerum 6 diuidendo per $\frac{3}{2}$, habetur numerus 4; qui idem numerus 4 habetur, quando numerus 6 ducitur in $\frac{2}{3}$. Solutionem vniuersaliter veram esse, docet subsequens quartum theorema.

Quæ-

Quæstio V.

An omnium numerorum poßibilium minimus sit vnitas.

IVxta nostras definitiones, etiam vnitas numerus est: quo supposito, quæro vtrum impossibilis sit aliqua quantitas discreta, siue aliquis numerus, minor vnitate: atque adeo omnium numerorum minimus sit vnitas; vel certe possibilis sit aliqua quantitas discreta, siue aliquis numerus, minor vnitate: atque adeo omnium numerorum minimus non sit vnitas. Prius pro vtraque parte affero vnum alterumue argumentum. Deinde statuo quid dicendum sit ad propositam quæstionem. Denique respondeo ad argumenta nobis contraria, atque prius allata. Singula perlegendo, intelliges, quid proposita quæstio, commune habeat cum præcedentibus quæstionibus, in quibus egimus de regula aurea, vel certe de multiplicatione atque diuisione, quas duas operationes, regulæ aureæ, veluti compendia esse, suo loco monuimus.

Omnium numerorum minimum esse vnitatem, suadere possunt subsequentia duo argumenta.

Primo. Quantitas discreta est subiectum habens terminationem; maior quantitas discreta, est subiectum habens plures terminationes; minor quantitas discreta, est subiectum habens pauciores terminationes: atqui impossibile est subiectum habens terminationes pauciores quam vnam: ergo omnium discretarum quantitatum possibilium, minor est illa, quæ habet vnicam terminationem: sed quantitas discreta habens vnicam terminationem, appellatur vnitas: ergo omnium possibilium quantitatum discretarum, minor, siue minima, est vnitas: atqui omnis numerus est quantitas discreta: ergo omnium possibilium numerorum, minor, siue minimus, est vnitas.

Secundo. Omnes numeri indicant indiuidua, vnum scilicet, vel plura: & maior numerus dicitur, qui indicat plura indiuidua: minor numerus dicitur, qui indicat pauciora indiuidua: atqui manifestum est, indicari non posse indiuidua pauciora quam vnum: ergo impossibilis est numerus, minor illo, qui indicat vnicum indiuiduum: sed numerus indicans vnicum indiuiduum, est vnitas: ergo impossibilium numerorum, minimus, est vnitas.

Omni-

Omnium numerorum minimum non esse vnitatem, suadere possunt subsequentia duo argumenta.

Primo. Vnum dimidium, est numerus minor vnitate. Similiter duæ tertiæ, duæ quartæ, tres quintæ, &c. sunt numeri minores vnitate: ergo dantur numeri minores vnitate; ergo omnium numerorum possibilium minimus non est vnitas.

Secundo. Ex eo quod quælibet recta linea potest diuidi, in duas, tres, quatuor, & quotlibet partes, æquales inter se, quæque singulæ sint rectæ lineæ: legitime sequitur, impossibilem esse rectam lineam, quæ omnium rectarum linearum possibilium minima sit; ergo similiter, ex eo quod quilibet numerus diuidi possit in duas, tres, quatuor, & quotlibet partes inter se æquales, quæ partes singulæ numeri sint: legitime sequitur, impossibilem esse numerum, qui omnium possibilium numerorum minimus sit; ergo omnium possibilium numerorum minimus, non est vnitas.

Ad propositam quæstionem, neque affirmatiue, neque negatiue responderi potest: sed distinctione opus est; itaque.

Dico primo. Magnitudine desumpta ab ipso numero, omnium numerorum possibilium minimus, est vnitas.

Dico secundo. Magnitudine desumpta à valore numeri, omnium numerorum eiusdem speciei minimus est vnitas: verum data quauis vnitate cuiusuis speciei, dari possunt minores numeri alterius speciei.

Pro intelligentia propositarum assertionum, aduertendum est: non minus vsitatum esse apud Arithmeticos, vnum numerum altero maiorem dicere, magnitudine desumpta ab ipso numero, quam magnitudine desumpta à valore numeri: tamen istæ duæ magnitudines magnopere inter se differunt, quemadmodum inter se maxime differunt, numerus, & valor numeri. Exempli gratia, quando dicitur quod numerus 16 linearum sit maior numero 12 superficierum; agitur de magnitudine desumpta ab ipsis numeris: hoc est, à subiectis habentibus terminationem; & sensus est, quod prior numerus indicet plura indiuidua; siue plura subiecta habentia terminationem, quam indicentur à secundo numero: neque significatur quod prioris numeri valor sit maior valore posterioris numeri. Idem contingit, quando numerus 12 binariorum, dicitur maior, numero 10 ternariorum. Vel quando numerus 12 arenularum, dicitur maior, numero 10 cumulorum compositorum ex arenulis. Has aliasque similes loquutiones communiter vsitatas esse, manifestum arbitror: & consequenter vsu receptum esse, vnum numerum altero maiorem dicere, magnitudine desumpta ab ipso numero: aliter enim

P veræ

veræ dici non possent, in prædictis loquutionibus contentæ assertiones. Præterea, quando dicitur quod inter se æquales sint subsequentes numeri $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{5}{10}$, &c. quodque singuli isti numeri sint maiores, quam subsequentes numeri $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{12}$, &c. agitur de magnitudine desumpta à valore: & sensus est, quod omnes priores numeri æqualem valorem habeant; quodque singuli priores numeri, habeant maiorem valorem quam posteriores. Idem accidit, quando numerus A dicitur æqualis numero B, vel maior numero C: supposito quod numerus A significet 2 Scuta, & quod numerus B significet 20 Iulios, quodque numerus C significet 14 Iulios. Has & alias similes loquutiones communi vsu admissas arbitror: quandoquidem enim apud Arithmeticos admittatur, non esse possibilem subtractionem ex qua relinquatur aliquod residuum, nisi quando minor numerus ex maiore subtrahitur: & etiam doceant ex $\frac{1}{4}$ subtrahendo $\frac{2}{5}$, relinqui aliquod residuum: atque similiter ex 2 Scutis subtrahendo 14 Iulios, relinqui aliquod residuum: constat iuxta ipsos numerum $\frac{1}{4}$ esse minorem numero $\frac{2}{5}$: & numerum 2 Scutorum esse maiorem numero 14 Iuliorum: magnitudine tamen desumpta à valore. Ex paucis quæ hic annotauimus, abundè constare arbitror, apud Arithmeticos vsitatum esse, vnum numerum altero maiorem dicere: tum magnitudine desumpta ab ipso numero, tum etiam magnitudine desumpta à valore numeri; atque silentio inuoluo alia quam plurima, ex quibus idem possem inferre. Quod vnum numerum altero maiorem asserendo, vix vnquam expresse addant, de qua magnitudine loquantur: non male videtur fieri; quandoquidem ex circumstantis satis colligatur de qua magnitudine sermo fit; sic etiam ego, in reflexione secunda, varios numeros considero, quos omnes inter se æquales affirmo, nulla addita distinctione: licet aliqui tantum æquales sint magnitudine desumpta ab ipsis numeris: alij vero tantum æquales sint magnitudine desumpta à valore. Idem alibi passim inuenies, tum in præcedenti Arithmetica, tum in nostra Logistica.

Ex hac expositione diuersarum magnitudinum, quarum vna, ab ipso numero, altera à valore numeri dependet: manifestus est sensus duarum assertionum paulo ante adductarum, pro responsione ad propositam quæstionem. Reliquum est, vt exponam quid dicendum sit ad argumenta prius allata, atque istis assertionibus nostris aduersantia; tale nihil aduerto in tribus prioribus argumentis: etenim in primo, & secundo, tantum agitur de magnitudine numeri, quæ desumitur ab ipso numero: atque stabilitur prior assertio. In tertio argumento, agitur de magnitudine quæ desumitur à valore nume-

numeri: atque probatur secunda assertio. Postremum argumentum, nostris assertionibus aduersatur: verum nihil contra nos euincit; proponit enim planè vitiosam paritatem, male desumptam ab identitate vocis, quæ diuersas significationes admittit; etenim, toto vt ita dicam cælo, inter se diuersa significat, vox diuidere, quando quantitas continua, siue linea dicitur diuidi: & quando aliqua quantitas discreta, siue numerus aliquis, diuidi dicitur. Vt hæc diuersitas melius appareat, iuuabunt sequentia. Primo, qui continuam quantitatem diuidit, bene dicitur continuam quantitatem secare in partes: qui numerum diuidit, non bene dicitur numerum secare in partes. Secundo, quod producitur ex diuisione quantitatis continuæ necessario est aliquid minus ipsa quantitate continua quæ diuiditur: quod producitur ex numero qui diuiditur, non est necessario minus numero qui diuiditur, sed potest illo maius esse, vel illi æquari. Tertio, quando exempli gratia vna linea recta diuiditur in partes æquales, singulæ partes productæ ex diuisione, necessario sunt eiusdem speciei, cum linea quæ diuiditur: verum quando vnitas in partes æquales diuiditur, tunc partes productæ ex diuisione, necessario specie differunt ab vnitate quæ diuiditur. Quarto quantitatem continuam diuidere in partes, non est instituere regulam auream, siue tres quantitates datas inuenire quartam proportionalem: verum numerum diuidere, est instituere regulam auream, siue ad tres datas quantitates inuenire quartam proportionalem. Quinto impossibile est, vnam lineam diuidere per vnam, vel duas, vel tres alias lineas: non est impossibile vnam vnitatem diuidere per vnam, vel duas, vel tres alias vnitates. Singula quæ hic asseruntur de diuisione quantitatis continuæ, intelligenda sunt, de illa diuisione de qua agitur in Geometria, quando demonstratur, quamlibet rectam lineam diuidi posse in quotlibet partes æquales: de hac enim diuisione agitur in proposito argumento. Cæterum, etiam circa continuas quantitates institui potest multiplicatio, & diuisio, quæ circa numeros docetur in vulgari Arithmetica: vt pluribus exponitur in Logisticæ Idea; immo iuxta nos quælibet quantitas, vel realiter, vel æquiualenter potest diuidi, per quamlibet aliam quantitatem, aut in illam duci; quod nisi verum foret, de quibuscunque quantitatibus non verificarentur subsequentia theoremata; vera enim non forent de quantitatibus circa quas non potest institui multiplicatio, aut diuisio; placuit tamen singula proponere, atque demonstrare, de quibuscunque quantitatibus: quandoquidem non tantum pro numeris, verum etiam pro alijs quantitatibus vtilia sint: atque non difficilius probentur de quantitatibus omnibus, quam de solis numeris. Vt

singu-

singula habeantur restricta ad solos numeros, in ipsis titulis, siue in hypothesi, pro voce *quantitates*, sufficit substituere vocem *numeri*.

Quatuor priora theoremata quæ subsequuntur, sunt illa, in quibus fundantur solutiones quatuor primarum quæstionum paulo ante propositarum. Quintum theorema, continet fundamentum problematis, quo hanc appendicem terminamus: in quo problemate simul proponuntur, varij, atque aliquantulum diuersi modi instituendi Regulam Auream, de quibus hactenus egimus in præsenti opusculo.

Pro vnoquoque theoremate, requiritur notitia Logisticarum scriptionum: atque notandum est, quod quando successiua scriptio, in qua inueniuntur plura membra particula *in* vel *per* connexa, nusquam interrupta est particula *sed*: tunc scriptio indicat, tum ipsas operationes instituendas, tum etiam ordinem quo illæ operationes successiuè instituendæ sunt; quoties verò, huiusmodi successiua scriptio interrupta est particula *sed*, immediatè præposita particulæ *in* vel *per*: significatur, illud quod præcedit particulam illam, *sed*, multiplicari, vel diuidi debere, per illud quod sequitur in eadem scriptione. Exempli gratia, scriptio A *in* B *per* C, significat A ductum in B, atque hoc productum diuisum per C: verum scriptio A *sed in* B *per* C, significat A ductum in productum ex B diuiso per C. Similiter scriptio A *per* B *in* C, significat A diuisum per B, atque hoc productum ductum in C: verum scriptio A *sed per* B *in* C, significat A diuisum per productum ex B ducto in C. Pari modo, scriptio A *per* B *per* C, significat A diuisum per B, atque hoc productum diuisum per C. Verum A *sed per* B *per* C, significat A diuisum per productum ex B diuiso per C.

Iudicatas scriptiones Logisticas, adhibemus in demonstrationibus subsequentium theorematum, tum ne cogamur interpositis lineolis, litteris litteras subscribere, tum etiam ne æquiuocationi obnoxiæ sint, quando scripto non exhibentur, sed tantum ab alio lectæ audiuntur. Quatuor priorum theorematum assertiones, duplici diuersa scriptione proponimus, vt legi possint, expressæ ea scriptione, quæ videbitur commodior.

Vt ex assertionibus duorum priorum theorematum, commode inferantur solutiones duarum priorum quæstionum: reflectendum est ad primam assertionem quinti theorematis: in qua statuitur, quod scriptio, B *in* C *per* A, significet quartum terminum proportionalem, quoties primus est A, secundus B, tertius C. Ex quo patet eumdem illum quartum proportionalem terminum, indicari, à qualibet scriptione, quæ æquiualet scriptioni B *in* C *per* A; huic scri-

scriptioni æquiualentes sex aliæ scriptiones, proponuntur in secundâ parte quinti theorematis, atque singulæ indicant aliquantulum diuersum ordinem operationum, per quas ex datis tribus terminis inueniri potest quartus proportionalis. Hinc resultat problema, quo præsentem appendicem claudimus, & continet septem modos soluendi Regulam Auream, inter se aliquantulum diuersos, atque hactenus separatim propositos.

Theorema I.

Qualescunque sint quantitates A, B, C.

Dico. B *in* C *per* A = B *sed per* A *per* C ≏ C *sed per* A *per* B.

Vel, quod idem est $\frac{B \text{ in } C}{A} = \frac{B}{A \text{ per } C}$ ≏ $\frac{C}{A \text{ per } B}$

Demonstratio. Per coroll. theor. 3. partis 4 Ideæ Logisticæ, B *in* C *per* A = B *per* A *in* C ≏ C *per* A *in* B: sed, per axioma primum partis 4. Ideæ Logisticæ, B *per* A *in* C = C *sed in* B *per* A, & etiam C *per* A *in* B = B *sed in* C *per* A: ergo, B *in* C *per* A = C *sed in* B *per* A ≏ B *sed in* C *per* A: atqui, per theorema propositum cap. 7. siue pagina 57. huius opusculi, C *sed in* B *per* A = C *sed per* A *per* B, & insuper, B *sed in* C *per* A = B *sed per* A *per* C: ergo, B *in* C *per* A = B *sed per* A *per* C ≏ C *sed pe*i A *per* B. Quod erat demonstrandum.

Theorema II.

Qualescunque sint quantitates A, B, C.

Dico. B *in* C *per* A = 1 *per* A *in* B *in* C.

Vel quod idem est, $\frac{B \text{ in } C}{A} = \frac{1}{A}$ in B in C.

Constructio, B *in* C = D.

Demonstratio. Per coroll. theor. 3 partis 4. Ideæ Logisticæ, D *in* 1 *per* A = 1 *per* A *in* D: sed, D *in* 1 *per* A = D *per* A: ergo, D *per* A = 1 *per* A *in* D, atqui per constructionem, B *in* C = D; ergo etiam B *in* C *per* A = 1 *per* A *in* B *in* C. Quod erat demonstrandum.

Theo-

Theorema III.

Qualeſcunque ſint quantitates A & B.

Dico. A *per* B $=$ 1 *per* B *in* A.

Vel, quod idem eſt, dico, $\frac{A}{B} = \frac{1}{B}$ in A.

Demonſtratio. Per axioma primum partis 4. Ideæ Logiſticæ, 1 *per* B *in* A $=$ A *ſed in* 1 *per* B; ſed, per theorema propoſitum capite 7. ſiue pagina 57. huius opuſculi, A *ſed in* 1 *per* B $=$ A *ſed per* B *per* 1 $\simeq$ A *per* B; ergo, A *per* B $=$ 1 *per* B *in* A. Quod erat demonſtrandum.

Theorema IV.

Qualeſcunque ſint quantitates A & B.

Dico. A *in* B $=$ A *ſed per* 1 *per* B $\simeq$ B *ſed per* 1 *per* A.

Vel, quod idem eſt dico, A *in* B $= \frac{A}{1 \text{ per } B} \simeq \frac{B}{1 \text{ per } A}$.

Demonſtratio. Per theorema primum hic propoſitum A *in* B *per* 1 $=$ A *ſed per* 1 *per* B $\simeq$ B *ſed per* 1 *per* A: atqui, A *in* B *per* 1 $=$ A *in* B; ergo, A *in* B $=$ A *ſed per* 1 *per* B $\simeq$ B *ſed per* 1 *per* A. Quod erat demonſtrandum.

Theorema V.

Qualeſcunque ſint quantitates A, B, C.

Dico primo. A *ad* B $=$ C *ad* B *in* C *per* A.

Dico ſecundo. B *in* C *per* A $=$ C *in* B *per* A $\simeq$ B *per* A *in* C $\simeq$ C *per* A *in* B $\simeq$ B *ſed per* A *per* C $\simeq$ C *ſed per* A *per* B $\simeq$ 1 *per* A *in* B *in* C.

Prima aſſertio, demonſtrata eſt in theoremate 3. partis 4. Ideæ Logiſticæ. Ex eiuſdem theorematis corollario, vel ex primo, aut ſecundo theoremate hic propoſito, immediate patet ſecunda aſſertio. Etenim in ſecunda aſſertione contentam primam ſcriptionem, æquari, ſiue æquiualere, tribus alijs proxmè ſubſequentibus, conſtat ex corollario theorematis 3. partis 4. Ideæ Logiſticæ: eamdem primam ſcriptionem æquari, ſiue æquiualere, quintæ & ſextæ ſcriptioni, oſtenſum eſt in primo theoremate hic propoſito; denique eamdem primam ſcriptionem, æquari, ſiue æquiualere ſeptimæ ſcriptioni, docetur in ſecundo theoremate hic propoſito, atque adeo patet, omnes ſeptem ſcriptiones hic propoſitas, æquari, ſiue æquiualere inter ſe.

Problema.

Continens ſeptem diuerſas ſolutiones Regulæ Aureæ.

Dati ſint quiuis tres numeri, quorum primus ſit A, ſecundus B, tertius C.

Oporteat inuenire quartum numerum proportionalem.

In exemplo vniuſcuiuſque ſolutionis, ſupponitur, quod numerus A ſit 12; numerus B ſit 8; numerus C ſit 6;

Prima ſolutio. Secundus numerus B, ducatur in tertium numerum C: deinde productum ex hac multiplicatione, diuidatur per primum numerum A. Exempli gratia, 8 ductum in 6 dat 48: deinde 48 diuiſum per 12 dat 4: adeoque quartus proportionales eſt 4.

Secunda ſolutio. Tertius numerus C ducatur in ſecundum B: deinde productum ex hac multiplicatione diuidatur per primum numerum A. Exempli gratia, 6 ductum in 8 dat 48: deinde 48 diuiſum per 12, dat numerum 4; qui eſt quartus proportionalis.

Tertia ſolutio. Secundus numerus B diuidatur per primum A: deinde productum ex hac diuiſione ducatur in tertium numerum C. Exempli gratia, 8 diuiſum per 12 dat $\frac{2}{3}$: deinde $\frac{2}{3}$ ducendo in 6, producitur numerus 4; qui eſt quartus proportionalis.

Quarta ſolutio. Tertius numerus C diuidatur per primum numerum A: deinde productum ex hac diuiſione ducatur in ſecundum numerum B. Exempli gratia, 6 diuiſum per 12 dat $\frac{1}{2}$: deinde $\frac{1}{2}$ ducendo in numerum 8, producitur numerus 4; qui eſt quartus proportionalis.

Quinta ſolutio. Primus numerus A diuidatur per tertium numerum C: Deinde per productum ex hac diuiſione diuidatur ſecundus numerus B. Exempli gratia, 12 diuiſum per 6 dat 2: Deinde 8 diuidēdo per 2 producitur numerus 4; qui eſt quartus proportionalis.

Sexta ſolutio. Primus numerus A diuidatur per ſecundum numerum B: deinde per productum ex hac diuiſione diuidatur tertius nu-

numerus C. Exempli gratia 12 diuisum per 8 dat $1\frac{1}{2}$; deinde 6 diuidendo per $1\frac{1}{2}$ producitur numerus 4; qui est quartus Proportionalis.

Septima solutio, Inuertatur primus numerus A, vt eius numerator fiat denominator, & eius denominator fiat numerator, atque vocetur assumptus numerus. Deinde assumptus numerus ducatur successiuè in secundum & tertium numerum. Exempli gratia inuertendo numerum 12, habetur $\frac{1}{12}$ & assumptus numerus erit $\frac{1}{12}$; hunc numerum ducendo in 6 habetur $\frac{1}{2}$: deinde $\frac{1}{2}$ ducendo in 8, producitur numerus 4; qui est quartus proportionalis. Similiter $\frac{1}{12}$ ducendo in 8, habetur numerus $\frac{2}{3}$: quem ducendo in 6 producitur numerus 4; qui est quartus proportionalis.

Errata	Sic Corrige.
Pag. 5. Linea 2. 7.036258. &c.	7.032658. &c.
Pag. 19. Linea 36. à numero deorsum	à numero 3. deorsum
Pag. 29. Linea 11. erit $5\frac{3}{23}$	erit $5\frac{3}{4}$
Pag. 29. Linea 12. producat $5\frac{3}{23}$	Producat $5\frac{3}{4}$
Pag. 39. Linea 10. 1. 29	1. 39
Pag. 39. Linea 11. 2. 74	2. 78
Pag. 48. Linea 32. duæ factiones	duæ fractiones.

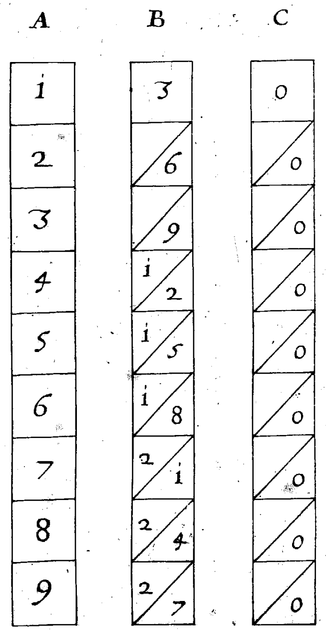

Fig. 1.ª

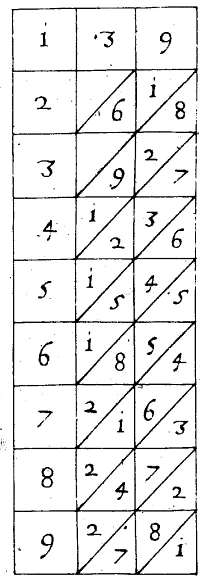

Fig. 2.ª